Ausführung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen,

nebst

Anmerkungen zu Hubens analytischer Abhandlung von den Kegelschnitten,

von

Carl Christian Langsdorf,

der Hochfürstl. Hessen-Homburgischen u. Königl. Schwedischen patriotischen Gesellschaften, der Kurfürstl. Pfälzischen physikalisch-oekonomischen Gesellschaft zu Lautern, und der Kurfürstl. Mainzischen Akademie der nützlichen Wissenschaften zu Erfurt ordentlichem Mitgliede.

Giessen,
bei Johann Christian Krieger.
1781.

Vorrede.

Sachverständigen, die zugleich so viele Billigkeit besitzen, als sie bisher bei Beurtheilung meiner Erläuterungen bewiesen haben, kann es auch für diesesmal nicht schwer fallen, mir nur die Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, daß sie die gegenwärtige Ausführung nicht blos aus ihrem Abstand von der größten Vollkommenheit, sondern zugleich mit Rücksicht auf meine veränderte Lage beurtheilen. Da mir in der Folge Pflichten aufgelegt wurden, die mir grade

zu der Zeit, da ich mit dieser Arbeit beschäf-
tigt ware, nur zerstreute, oft um ganze Wo-
chen von einander entfernte Zwischenstunden
zu meiner Disposition liessen, und mir das
erfoderliche zusammenhängende Nachdenken
untersagten, so glaube ich Entschuldigung
zu verdienen, wenn man die gegenwärtige
Ausführung etwas mangelhaft finden wird.
Anfängern, denen es ein Ernst ist, Wahr-
heiten zu forschen, wird dann doch das Ge-
genwärtige hinreichend sein, Hrn. Hofr.
Kästners Wink und Sprache nach und
nach inne zu werden; und für Andere taugt
die Analysis des Unendlichen ohnehin nicht;
die kennen nicht

„Das Glück, die Wahrheit zu erfinden,
„Das Glück, das Weise nur empfinden;
„Drum hört man's öfters Thoren schmähn
„Wer kann dafür, daß sie nicht sehn?

Hauptzweifeln, die Anfängern hätten auf-
stosen können, habe ich überall so zu begeg-
nen

len gesucht, daß sie wenigstens im Stande sein werden, nun selbst weiter zu denken. Dahin gehören verschiedene Erinnerungen bei 339. die ich nebst der mir vom Hrn. H. Kästner darüber gütigst mitgetheilten Antwort hier eingerückt habe. Bei Gelegenheit der Erl. zu 343. habe ich die wichtige Materie von Summirung der Reihen berührt, die bei den dortigen Sätzen von grossem Nutzen ist. Bei 398. I. habe ich die allgemeine Gleichung ⊙)

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a \pm b\,x^n)^{-p}} = \frac{-p}{b^{-p}} \cdot \int \frac{x^m \cdot dx}{\alpha \pm x^n}$$

angenommen und mich verschiedenemal darauf bezogen; hier erinnere ich, um allem Mißverständnis vorzubeugen, noch ein für allemal, daß die Gleichung ⊙ die Bedingung enthält: wenn in $\int \frac{x^m\,dx}{\alpha \pm x^n}$ die Werthe von L, L und l, wie sich solche aus der gegebenen Formel $\frac{x^m\,dx}{(a \pm b\,x^n)^{-p}}$ erge-

ben, gehörig substituirt werden. Zu der Anzahl der Integralformeln hätte ich leicht noch andere z. B. $\int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ deren Integration höh. Mechan. S. 193. gewiesen wird, hinzusetzen können, wenn sich nicht das im Buch gewiesene Verfahren auch auf solche anwenden liesse, und wenn es mir andere Umstände verstattet hätten, diesen Commentar vollständig zu machen. Ich kann indessen eine wichtige Bemerkung zu 329 u. f. die mir ihr Erfinder Hr. Mayer zu Göttingen, der sich schon durch seine praktische Geometrie dem Publikum bestens empfohlen, mitgetheilt hat, doch nicht ganz unberührt lassen. Da ich sie von meinem Freund erhielte, waren die gegenwärtigen Erläuterungen schon längst in des Verlegers Händen, daher ich sie nicht mehr gehörigen Orts einschalten konnte. Der Satz heißt so:

In

In einer transcendentischen Gleichung von der Form

$$\sin x . \cos x = A . \cos x + B . \sin x$$

sind die 4 Werthe der unbekannten Grösse x so beschaffen, daß ihre Summe allemal $= \pm (2m + 1)\, 180°$ ist, wo m jede ganze Zahl bedeuten kann.

Der Beweiß davon liegt in 329 u. f. wonach man nämlich die erwähnte Formel in eine andere verwandelt, und auf deren letztes Glied Rücksicht nimmt. Hr. M. meldet mir, daß er sich dieses Satzes bedient habe, eine merkwürdige Eigenschaft der sphärischen Spiegel zu erweisen (Comment. Soc. Reg. sc. Goett. Tom. VII.).

Der Aufsatz vom Interpoliren ist gleichfalls viel jünger als die Erläuterungen; die besondere Veranlassung dazu war der gutgemeinte Unwillen Eines meiner Freunde, der gerne davon unterrichtet sein wollte, und

in dem Kästnerischen Buch, das er sich zu seinem Handbuch gemacht hatte, nichts davon fandte. Und weil ich glaubte, daß dieser kurze Aufsatz vielleicht auch Andern, die sich dieser Erläuterungen bedienen wollen, nicht unangenehm sein würde, so faßte ich den Entschluß, ihn hier mit beidrucken zu lassen. Es war meine Pflicht, zuvor meinen wohlmeinenden Lehrer selbsten um Seine Gedanken darüber zu befragen, der mir dann auch nicht davon abrieth, und mir überdas noch mit einem eigenen kleinen Aufsatz, der hier gleichfalls erscheint, ein angenehmes Geschenk machte. Dank sei dafür dem Mann, der durch Seine Kenntnisse den größten Geistern Bewunderung, und durch Seine Herablassung und liebevolles Herz selbst dem Menschenfeind Liebe abzwingt.

Die Erläuterungen über Hubes Abhandlung von den Kegelschnitten, habe ich auf

Hrn. Scheibels Rath hier angehängt. Ich hatte sie noch vor denen Erläuter. über die Anal. endl. Gr. aufgesetzt, und würde mich also vermuthlich hier und da itzt anders ausdrucken, als ich damals gethan habe. Ich hoffe indessen die Absicht, Anfängern das Verständnis des treflichen Hubeschen Buchs dadurch zu erleichtern, nicht verfehlt zu haben.

Ich bediene mich des Platzes, noch verschiedenes wegen des vorigen Stücks zu erinnern. Die dort beigefügten logarithmische Tafeln scheinen gegen das Ende hin mangelhaft, sie sind es aber nicht; nur zu meiner und des Druckers Bequemlichkeit ließ ich nach dem Ende zu die hyperbol. Logar. der zusammengesetzten Zahlen weg, und setzte blos die Log. der Primzahlen hin, woraus sich die Log. der zusammengesetzten Zahlen von selbst ergeben. Auser dieser beiläufigen

Erinnerung finde ich für nöthig, einige mir gemachte Einwürfe in der Kürze zu beantworten. Der Hr. Rec. in den Hall. gel. Anz. 10. St. vom Febr. 1779. dem ich für die ungemein gütige Beurtheilung und genaue Prüfung meiner geringen Arbeit sehr verbunden bin, macht gegen die Behauptung „daß alle Differentialien in der Strenge = o seien„ einige nicht unerhebliche Einwendungen, die sich, dächte ich, so aus dem Weg räumen liessen. „Sind die Differentialien beständiger Grössen, sagt „Hr. Rec., wirklich im strengsten Verstande = o, und haben sie keine; so „folgt, daß, weil veränderliche Grössen Differentialien haben, diese im „strengsten Verstande nicht = o sein „können.„ Etwas diesen Einwand treffendes habe ich schon im vor. St. der Erl. S. 25. §. 22. erwähnt, und man darf damit

mit nur noch, was ich a. a. O. S. 17. gesagt habe, vergleichen. Für sich betrachtet sind freilich dx, da, gleichgrosse absolute Grössen, nämlich beide = o; aber S. 17. habe ich schon erinnert, daß man nie das Differential einer einzelen Grösse, sondern allemal das Verhältnis eines Differentials zu einem andern sucht, oder die Verhältnis zwoer Grössen in dem Zustand, da sie eben beide verschwinden wollen; und nun ist meine Behauptung nur die: Das Differential einer beständigen Grösse stehe mit keinem Differential einer veränderlichen Grösse in einer Verhältnis, weil sich nämlich beständige Grössen in keinem verschwindenden Zustand gedenken lassen. Hingegen behalten veränderliche Grössen, die Funktionen von einander sind, ordentlich eine endliche Verhältnis gegen einander, so klein auch immer diese Grössen für sich betrachtet genommen

werden,

werden, so daß ihre Verhältnis selbst in ihrem verschwindenden Zustand ordentlich endlich bleibt. Also haben freilich die veränderliche Grössen Differentialien, die für sich in der Strenge = o sind, die aber doch mit den Differentialien anderer veränderlichen Grössen, die Funktionen der vorigen sind, ordentlich in einer endlichen Verhältnis stehen, welches von den beständigen Grössen nicht gilt. Ferner sagt Hr. Rec. „In Berechnung und Unter„suchung des grösten und kleinsten wird „das Differential erst im strengsten Ver„stande = o gesetzt, weil es seiner Na„tur nach noch nicht = o ist.„ Das sind eben die wenigen Fälle, da die Verhältnis

der

der Differentialien selbst nicht endlich, sondern $= 0$ (oder $= \infty$) ist. Also setzt man in diesen Fällen eigentlich nicht die Differentialien für sich $= 0$, — das sind sie allemal — sondern ihre Verhältnis, die ordentlich nicht $= 0$ ist. (*) Es folgt also daraus

(*) Nur zur Abkürzung des Vortrags bedienen sich freilich selbst grosse Meßkünstler des Ausdrucks: „um größte oder kleinste Werthe einer Formel zu finden, soll man ihr Differential $= 0$ setzen.“ So sagt z. B. Hr. Hofr. Kästner in höh. Mech. S. 334. bei Erfindung des größten Werths von $\frac{4Aa}{AC + C + B}$, wo nur B veränderlich ist, gehörig verstanden ganz richtig: dieses (nämlich die Erfindung des größten Werths) geschieht nun vermöge der Methode der größten und kleinsten, wo sein Differential verschwindet, also $\frac{AC. - dB}{B^2} + dB = 0$ oder $B^2 = AC$.

Anfän-

daraus nicht, was Hr. Rec. sagt, daß die Differentialien selbst ordentlich nicht $= 0$

Anfänger könnten indessen dadurch zu dem Gedanken verleitet werden, als verschwänden die Differentialien in andern Fällen nicht; für solche füge ich deßwegen noch nachstehende Erläuterung bei. Nach dem Differential einer Grösse fragen, heißt nach nichts fragen, und was gesucht wird, ist eigentlich allemal, wie ich schon im vor. St. dieser Erläuter. bemerkt habe, die Verhältnis eines Differentials gegen das andere. Indem man also hier das Differential von $A + \frac{AC}{B} + C + B$ $= x$ sucht, wo nur B veränderlich ist, verlangt man eigentlich zu wissen, wie sich x ändern muß, indem B aus einem Zustand in seinen nächstfolgenden tritt d. h. man findet die Verhältnis des Differentials von x zum Differ. von B also den Quotienten $\frac{dx}{dB}$ oder $\frac{\frac{A.C. - dB}{B^2} + dB}{dB}$ wenn man auch nicht an diesen Quotienten, sondern

nur

=o seien. Geschrieben auf dem Hessischen Salzwerk zu Salzhausen bei Giesen, im Jan. 1780.

C. C. Langsdorf.

---

nur an den Zähler denkt; verlangt man nun den Werth dieses Quotienten für den Zustand, wo x ein grösstes ist, so muß man ihn = o setzen. Solchergestalt hat man

$$\frac{\frac{AC. - dB}{B^2} + dB}{dB} = o$$

oder $-\frac{AC}{B^2} + 1 = o$

also wie vorhin $B^2 = AC$

Ohne aber immer erst diese Betrachtung bey sich anzustellen, muß man freilich ebendas erhalten, wenn man das Differential der Grösse, deren Grösstes oder Kleinstes man sucht, sogleich = o setzt. Es liegt nämlich dabei alsdann stillschweigend die Voraussetzung zum Grund, daß das Differential der andern Grösse (hier dB) für die Einheit gelte.

Neue Bücher
bey Krieger dem jüngern in Gießen.

Fr. Thom. Chastel methodische Abhandlung über die ächte französische Aussprache und Rechtschreibung. 8.

Erziehungs-Begebenheiten, die neuesten, mit praktischen Anmerkungen aufs Jahr 1781. Erstes bis Fünftes Stück. 8. (sie werden monatlich fortgesetzt.)

Geist der neusten Schriften, 1stes Probestück. 8.

Koch, J. Christ. peinliche Hals- oder Gerichts-Ordnung Kayser Carl V. Dritte verbesserte Auflage. 8.

Langsdorf, Joh. Wilh. ausführliche Abhandlung von Anlegung, Verbesserung und zweckmäßigen Verwaltung der Salzwerke. 2 Bände, mit 10 Kupfertafeln. 4.

Langsdorf, C. C. Ausführung der Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen, nebst Anmerkungen über Hubens analytische Abhandlung von den Kegelschnitten. 8. mit Kupfern.

Julie von Marenfeld, oder, die Eitelkeit verschlimmert das beste Herz; ein Schauspiel in 3 Aufzügen, von L. Kuder. 8. Frkft. und Leipzig.

Magazin für Ingenieur und Artilleristen; herausgegeben von Andr. Boehm. 7ter Band, mit Kupfern. 8.

Michaelis, C. sämmtliche Werke; 2ter Band. 8.

Religions-Begebenheiten, die neusten, mit unpartheyischen Anmerkungen, aufs Jahr 1781. 1stes bis 5tes Stück. 8. (werden fortgesetzt.)

Stockhausen, J. Ch. neue Predigten über gewählte Texte. gr. 8.

Die neusten Weltangelegenheiten zuverläßig erzählt aufs Jahr 1781. 4 Stücke. 8. (werden monatlich fortgesetzt.)

Ausfüh-

Ausführung

der

Erläuterungen über die Analysis des Unendlichen.

Vom Interpoliren.

1. x und y seien Funktionen von einander, so daß gegebenen Werthen m, n, p, q, r, ꝛc. von x, gegebene Werthe α, β, γ, δ, ε ꝛc. von y zugehören. Das Verfahren nun, da man diejenigen Werthe von y sucht, die denen zwischen die m, n, p, q, r ꝛc. fallenden Werthen von x zugehören, heißt man das Interpoliren.

2. Es kommt also hierbei überhaupt darauf an, daß man eine solche Gleichung zwischen x und y an-

zugeben wiſſe, die uns $y = \alpha$, $y = \beta$, $y = \gamma$ ꝛc. giebt, ſo wie wir darin $x = m$, $x = n$, $x = p$ ꝛc. ſetzen.

3. Sind x und y algebraiſche abgeſonderte Funktionen von einander, ſo hat man keiner beſondern Regeln nöthig, diejenigen Werthe von y zu finden, welche denen zwiſchen die gegebenen Werthe m, n, p ꝛc. von x fallenden zugehören, da man in ſolchem Fall aus der Gleichung zwiſchen x und y auch diejenigen Werthe von y leicht findet, die denen von x, welche zwiſchen m, n, p ꝛc. fallen, zugehören.

Ein Exemp. giebt die Erl. der Alg. S. 8 u. 9. Bedeutet nämlich x die Anzahl der Glieder und y die Glieder ſelbſt von einer arithmetiſchen Reihe, ſo daß den Werthen 1, 2, 3, 4 ꝛc. von x die Werthe 4, 7, 10, 13 ꝛc. von y zugehören, ſo läßt ſich fragen: Was für ein Werth von y gehört dem Werth $8\frac{2}{3}$ von x zu? Dieß zu beantworten müßte man, wie a. a. O. gewieſen iſt, die arithmetiſche Reihe 4, 7, 10, 13 ꝛc. ergänzen oder die fehlenden Glieder einſchalten d. i. interpoliren, wozu aber in dergleichen Fällen weiter nichts als eine Ueberlegung nöthig iſt, und keine beſondere Kunſtgriffe erfodert werden. Eben ſo leicht würde die Interpolation ſein, wenn y die Glieder einer geometriſchen Reihe bedeutete (a. a. O. S. 17. no. II. am E.)

4. Es kommen aber häufig Fälle vor, wo man zwar für y eine gegebene Reihe von Werthen α, β, γ--- hat, die einer gegebenen Reihe m, n, p --- von Werthen für x zugehören, übrigens aber eine algebr. abgeſ. Gleichung zwiſchen x und y fehlet, die

die uns in den Stand setzte, auch diejenigen Werthe von y zu finden, die denen von x, welche zwischen die m, n, p - - - fallen, zugehören, und da bedient man sich dann zur Erfindung derer zwischen die α, β, γ - - - fallenden Werthe von y besonderer **Einschaltens-** oder **Interpolations-Formeln**, vermittelst deren wir eine solche Gleichung zwischen x und y anzugeben im Stande sind, die uns der Wahrheit ziemlich nahe $y = \alpha$, oder $y = \beta$, oder $y = \gamma$ ꝛc. giebt, nachdem wir darin $x = m$, oder $x = n$, oder $x = p$ ꝛc. setzen, da sich dann dadurch aus jedem zwischen m, n, p - - - liegenden Werth von x auch ziemlich genau (wenn nämlich m, n, p - - - selbst nicht zu sehr von einander abweichen) der zwischen α, β, γ - - - liegende von y ergiebt.

5. Es ist gewissermaßen willkührlich, was für eine Reihe von x man für die Bestimmung des Werthes von y annehmen will, wenn man nur die Coefficienten dieser Reihe so zu bestimmen weiß, daß die Formel, wann in ihr die gegebenen Werthe m, n - - - von x substituirt werden, alsdann die zugehörigen gleichfalls schon bekannten Werthe von y giebt. Man kann daher überhaupt folgende drey Formeln annehmen:

1) $y = ax + bx^2 + cx^3$ - - -

2) $y = ax + bx^3 + cx^5$ - - -

3) $y = ax^2 + bx^4 + cx^6$ - - -

Ich glaube nicht, daß es nöthig sei, eine vierte Formel hinzu zu setzen; indessen hat Hr. Lambert

im IIIten Th. seiner Beiträge, wo er S. 66-104. vom Interpoliren handelt, noch eine vierte besonders beigefügt.

6. Soll nun in den Formeln (ħ)

für $x = m \quad y = \alpha$

$= n \quad = \beta$

$= p \quad = \gamma$ werden

$= q \quad = \delta$

⋮ ⋮

so erhellet, daß man den Gliedern dieser Formeln eine solche Gestalt geben müsse, bei der jedesmal die Reihe für y von selbst gehörig abbricht, nachdem der Werth von x beschaffen ist, dem das y zugehört. Es ist also am bequemsten in die Glieder von ħ die Grössen $x - m$, $x - n$, $x - p$ ꝛc. selbst als Faktoren hineinzubringen, damit alsdann jedesmal die Reihe für y (z. E. für $y = \varepsilon$) mit dem Glied abbricht, das zuerst $x - n$ enthält, wo n dem β zugehört. Man wird also dieser Absicht gemäß leicht auf den Gedanken kommen, die obigen Formeln (ħ) so auszudrucken:

1) $y = Ax + Bx.(x - m) + Cx.(x - m).(x - n) + \&c.$

2) $y = Ax + Bx(x^2 - m^2) + Cx.(x^2 - m^2).(x^2 - n^2) + \&c.$

3) $y = Ax^2 + Bx^2(x^2 - m^2) + Cx^2(x^2 - m^2).(x^2 - n^2) + \&c.$

7. Daß diese leztere Formeln in (6.) nicht nothwendig so sein müssen, sondern noch Modificationen leiden, habe ich schon (5. am Anf.) erinnert, wiewohl sie zu allem Gebrauch bequem genug sein werden. Die Aehnlichkeit mit der Binomialformel könnte indessen den Gedanken veranlassen, die drei erwähnten Formeln lieber so einzurichten:

1) $y = Ax + Bx \cdot \frac{x-m}{m} + Cx \cdot \frac{(x-m).(x-n)}{m.n}$

$+ \&c.$

2) $y = Ax + Bx \cdot \frac{x^2-m^2}{m^2} + Cx \cdot$

$\frac{(x^2-m^2).(x^2-n^2)}{m^2.n^2} + \&c.$

3) $y = Ax^2 + Bx^2 \cdot \frac{x^2-m^2}{m^2} + Cx^2 \cdot$

$\frac{(x^2-m^2).(x^2-n^2)}{m^2.n^2} + \&c.$

wo die erste Formel, wenn m, n, p, - - - die Zahlen 1, 2, 3 - - - vorstellen, so aussieht:

$y = Ax + B \cdot \frac{x.(x-1)}{1} + C \cdot \frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2}$

$+ D \cdot \frac{x.(x-1).(x-2).(x-3)}{1.2.3} + \&c.$

wo die Aehnlichkeit mit den Ausdrücken Alg. 141. leicht in die Augen fällt.

8. La Caille behält die Reihen ∓ bei, aber **Walmesley** in den memoires de l'Acad. de Berl. 1758. und ein Anonim. in den Actis erudit. (*) haben ſich der bequemern Formeln (6.) bedient, wie ich nur aus Hrn. **Lamberts** Beiträgen weiß. Hr. **Lambert** ſelbſt aber hält die Formeln (7.) für die bequemſten, die wir dann auch hier beibehalten wollen.

9. Es kommt alſo darauf an, die Coeff. A, B, C - - - ſo zu beſtimmen, daß y die Werthe α, β, γ - - - für $x = m$, $x = n$, $x = p$ - - - erhält, daher für jede der drei Formeln eine beſondere Rechnung nöthig iſt.

10. Soll in der erſten Formel $y = \alpha$ für $x = m$ werden, ſo hat man, dieſen Werth von y und x ſubſtituirt, $\alpha = A.m \mp 0 \mp 0 \mp 0$ - - -

alſo $A = \alpha : m$

Iſt $y = \beta$ für $x = n$, ſo wird

$$\beta = An \mp B.\frac{n.(n-m)}{m} \mp 0 \mp 0 \text{ - - -}$$

alſo

$$B = \frac{(\beta - An).m}{n.(n-m)}$$

$$= \left(\frac{\beta}{n} - A\right).\frac{m}{n-m}$$

Um

(*) ſ. in der gleich folgenden Käſtneriſchen Abhandl. den 9ten Abſatz.

Um nun ferner $y = \gamma$ für $x = p$ zu erhalten, hat man

$$\gamma = Ap + B.\frac{p.(p-m)}{m}$$

$$+ C.\frac{p.(p-m).(p-n)}{m.n} + 0\cdots$$

wo nämlich jedes der folgenden Glieder allemal o zum Faktor hat. Das giebt nun

$$C = \frac{\left(\gamma - Ap - B.\frac{p.(p-m)}{m}\right).mn}{p.(p-m).(p-n)}$$

$$= \left(\frac{\gamma}{p} - A - \frac{B.(p-m)}{m}\right).\frac{mn}{(p-m).(p-n)}$$

Setzt man weiter $y = \delta$ für $x = q$, so erhält man völlig ebenso

$$D = \left(\frac{\delta}{q} - A - B.\frac{q-m}{m} - C.\frac{(q-m).(q-n)}{m.n}\right)$$

$$\times \frac{mnp}{(q-m).(q-n).(q-p)}$$

wo das Gesetz des Fortgangs der Coeff. leicht in die Augen fällt, so daß sich ohne weitere Rechnung

$$E = \frac{s}{r} - A - B.\frac{r-m}{m} - C.\frac{(r-m).(r-n)}{mn} - D.\frac{(r-m).(r-n).(r-p)}{mnp}\Big) \times \frac{mnpq}{(r-m).(r-n).(r-p).(r-q)}$$

und ſo F, G - - - von ſelbſt ergeben.

II. Für die zwote Formel in 7. erhält man auf eben die Art

$$A = \alpha : m$$

$$B = \left(\frac{\beta}{n} - A\right).\frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

$$C = \left(\frac{\gamma}{p} - A - B.\frac{p^2 - m^2}{m^2}\right).\frac{m^2 n^2}{(p^2 - m^2).(p^2 - n^2)}$$

$$D = \Big(\frac{\delta}{q} - A - B.\frac{q^2 - m^2}{m^2} - C\frac{(q^2 - m^2).(q^2 - n^2)}{m^2 n^2}\Big) \times \frac{m^2 n^2 p^2}{(q^2 - m^2).(q^2 - n^2).(q^2 - p^2)}$$

u. ſ. w.

12. Und ebenso wird in der dritten Formel

$$A = \frac{\alpha}{m^2}$$

$$B = \left(\frac{\beta}{n^2} - A\right) \cdot \frac{m^2}{n^2 - m^2}$$

$$C = \left(\frac{\gamma}{p^2} - A - B \cdot \frac{p^2 - m^2}{m^2}\right) \cdot \frac{m^2 n^2}{(p^2 - m^2) \cdot (p^2 - n^2)}$$

u. s. w.

wo sich allemal die folgenden Coeff. D, E --- aus dem in die Augen fallenden Gesetz des Fortgangs leicht hinschreiben lassen, ohne daß man, sie besonders zu berechnen, nöthig hätte.

13. Je näher einander die Werthe m, n, p --- von x, denen die gegebenen Werthe α, β, γ --- von y zugehören, liegen, und je mehr die Werthe von y denen von x proportionirt sind, desto genauer muß man aus denen einander zugehörigen gegebenen Werthen m, n, p --- von x, und α, β, γ --- von y durchs Interpoliren die Werthe von y finden, welche denen zwischen m, n, p --- liegenden Werthen von x zugehören.

14. Ex. Es sei für

x = m = 82		y = α =	1,9138
= n = 83		= β =	1,9190
= p = 84		= γ =	1,9242
= q = 85		= δ =	1,9294

wo die Werthe von y die Brigg. Logarithm. der Werthe von x sind, so giebt die zwote Formel, deren ich mich hierbei bedienen will (7. u. 11.)

$$y = \frac{\alpha}{m} . x + \left(\frac{\beta}{n} - A\right) \frac{m^2}{n^2 - m^2} . x . \frac{x^2 - m^2}{m^2}$$

$$+ - - -$$

$$= \frac{1,9138}{82} . x + \left(\frac{1,9190}{83} - \frac{1,9138}{82}\right)$$

$$\frac{82^2}{165} . x . \left(\frac{x^2 - 82^2}{82^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{1,9242}{84} - \frac{1,9138}{82} - B . \frac{84^2 - 82^2}{82^2}\right)$$

$$\times \frac{82^2 . 83^2}{(84^2 - 82^2) . (84^2 - 83^2)}$$

$$. \frac{x . (x^2 - 82^2) . (x^2 - 83^2)}{82^2 . 83^2}$$

$$= 0,02333 . x - 0,0000012 . (x^3 - 6724 . x)$$

$$- 0,00007 . x . (x^2 - 82^2) . (x^2 - 83^2)$$

$$+ - - - (\S$$

Setzt man hier $x = 83$, so wird

$$y = 0,02333 . 83 - 0,0000012 . (571787$$

$$- 558092)$$

$$= 1,93639 - 0,0164 = 1,919 - - -$$

wie sich für log 83 als den Werth von y gehört. Wollte man nun für $x = 83,5$ den Werth von y

d. i.

d. i. log 83,5 durchs Interpoliren finden, so setzte man nur $x = 83,5$; das gäbe, wenn man die beiden ersten Glieder von (Y) gebrauchte

$$y = 0,0233 \cdot 83,5 - 0,0000012 \cdot (83,5^2 - 6724 \cdot 83,5)$$

$$= 1,945 \text{---} - 0,024 = 1,921 \text{---}$$

wie man auch in den Tafeln findet, wenn man die Charakterist. von log brigg 835 um 1 vermindert.

So viel, glaubte ich, würde hinreichend sein, Anfängern die nöthigen Begriffe vom Interpoliren beizubringen. Sonst kann man sich auch der Methode der Differenzen zum Interpoliren bedienen, worüber ich noch nachstehenden kurzen Aufsatz beifügen will. Man wird ihn mit desto grösserm Vergnügen lesen, wenn ich hinzusetze, daß mir ihn Hr. H. Kästner vor kurzem selbsten mitzutheilen die Gewogenheit gehabt hat.

1. Wenn $y, y1, y2 \text{---} yn$ nach einander folgende n Glieder einer Hauptreihe bedeuten, $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$ --- die ersten Glieder der Differenzreihe, so ist (Anal. endl. Gr. 725)

$$yn = y + n \cdot \Delta 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta 2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta 3 \text{---}$$

2. Diese Interpolation braucht man häufig in der Astronomie, wo man bis auf zweite auch dritte

Diffe-

Differenzen geht. Z. E. aus de la Lande Astron. 3181. der 1. Ausgabe

Tage	Länge des ☾	I. Diff.	II. D.	III. D.
1	13. 4° 34′ 3″			
2	1 17 41 1	13° 6′ 58″		
3	2 1 11 33	13 30 32	23′ 34″	
4	2 15 7 15	13 55 42	25 10	1′ 36″
5	2 29 33 55	14 26 40	30 58	5 48.

3. Man verlangt y für den zweiten Tag 15^h

4. Man setze also

$y = 1\,3\;17^\circ\;41'\;1''$

so ist $\Delta 1 = 13\;30\;32 = 48632''$

$\Delta 2 = 25\;10 = 1510$

$n = \frac{15}{24}$: $n - 1 = -\frac{9}{24}$

5. Also $\log \frac{15}{24} = \log n = 0{,}7958801 - 1$

$\log 48632 = \log \Delta 1 = 4{,}6869221$

Summe $= 4{,}4828022$

6. $\log n = 0{,}7958801 - 1$

$\log \frac{9}{24} = l\,(1 - n) = 0{,}5740313 - 1$

$\log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$

$\log 1510 = \log \Delta 2 = 3{,}1789769$

Summe $= 2{,}2478583$

7. Aus

7. Aus der Summe (5.) ist $n.\Delta 1 = 30395''$

aus der (6.) ist $\frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2 = -176{,}9$

$n.\Delta 1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2 = 30218''$ aus der Taf. am Ende meiner 4tē astr. Abhand.

$8^\circ = 28800''$

$1418''$

$23' = 1380$

$38''$

also $n.\Delta 1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2 = 8^\circ\ 23'\ 38''$

zu $y = 1\,3\,17\ 41\ 1$

giebt $y^n = 1\,3\ 26^\circ\ 4'\ 39''$

für die Länge des ☾ den 2. Tag 15^h; de la Lande hat 1 Z. $26^\circ\ 4'\ 44''$. Er braucht statt $\Delta 2$ das arithmetische Mittel zwischen $23'\ 34''$ und $25'\ 10''$, nämlich $24'\ 22''$. Ich sehe aber die Nothwendigkeit dieses Verfahrens nicht ein, und am Ende giebt es das Facit nur unbeträchtlich anders.

8. In den Berliner Ephemeriden werden zu dieser Absicht des Interpolirens die Werthe x; $\frac{x.(x-1)}{1.2}$; $\frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}$ ... für unterschiedene vorkommende

mende Gröſſen von x in Tafeln angegeben. So iſt auch dergleichen Tafel zum Einſchalten in Herrn **Schulzens** neuerlich herausgegebenen logarithmiſchen, trigonom. u. a. Tafeln. (*)

9. Der Ungenannte, der vom Interpoliren in denen Act. Erud. geſchrieben hat, iſt **Walz**, ein Würtenberger. — Ich habe ihn noch zu Hauſens Zeiten als Hofmeiſter gekannt. Er ſtarb in Dresden als Königl. Pohln. Churſächſ. Hofmathematikus.

10. Wenn die erſten Differenzen gleich werden, ſo hat man zum Interpoliren nur n. Δ 1. Das ſind die gewöhnlichen Proportionaltheile. So ſind bei den Logarithmen für die 7 Decimalſtellen, in denen man ſie braucht, die erſten Differenzen gleich.

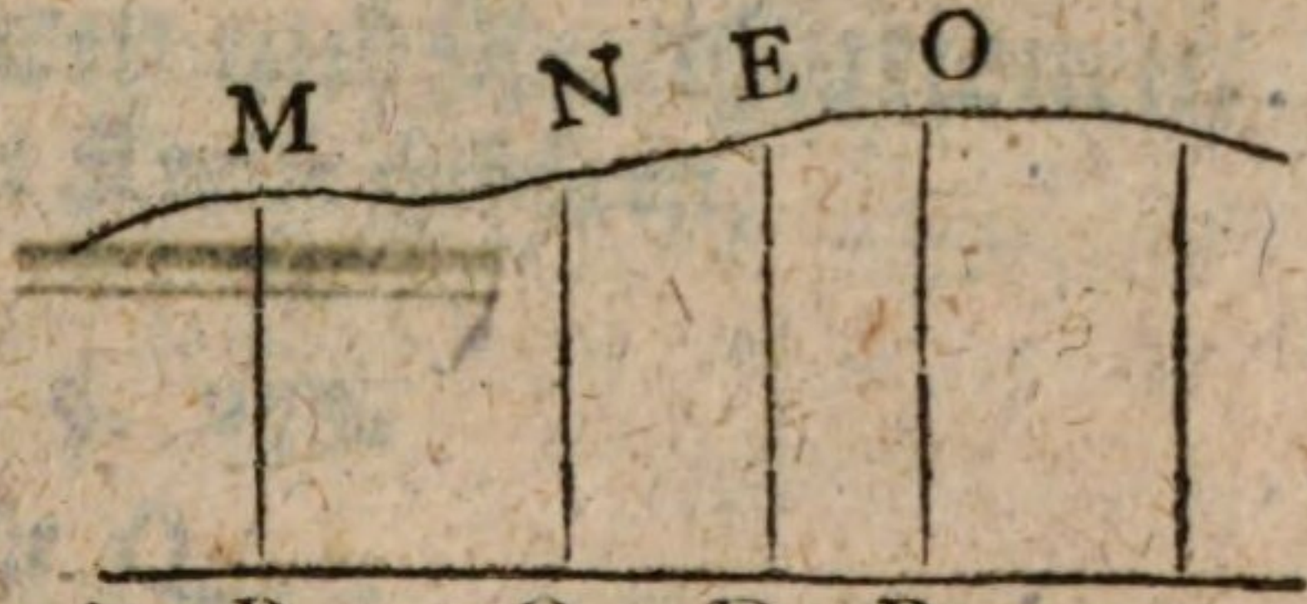
11. Wollte man im Exemp. ſehen, ob die dritte Differenz = 348″ was beträchtliches änderte, ſo müßte man $\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$. 348 berechnen. Es würde aber höchſtens ein Paar Secunden betragen, weil $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ nur Hunderttheile enthält.

Hr. Hofr. Käſtner ſcheint überhaupt nicht viel aufs Interpoliren zu halten, und deswegen ſolches in ſeinen beiden Bänden der Analyſis ganz übergangen

(*) ſ. auch Lamberts Zuſätze ꝛc. ꝛc.

gen zu haben. Er erklärt sich darüber in dem Schreiben, dem Er zugleich den vorigen Aufsatz beigelegt hatte, etwas näher, und ich will mit seinen Worten diese Sätze beschließen:

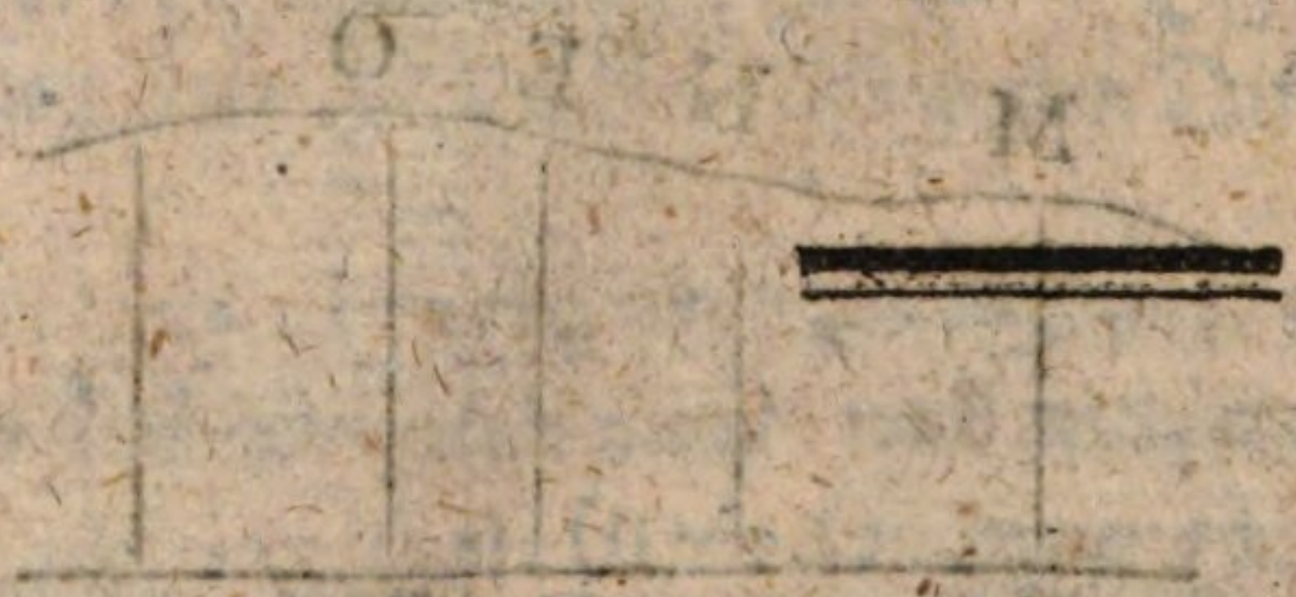
„Man braucht das Interpoliren häufig, zwischen berechnete und beobachtete Grössen, welche hineinzuschieben. Ich habe nie ein grosses Vertrauen dazu gehabt. Denn es heißt ohngefähr soviel, und so hat es auch **Newton** in seiner methodo differentiali, welches eigentlich das Interpoliren betrift, vorgetragen. Man hat von einer krummen Linie Coordinaten AP, PM; AQ, QN; AR, RO; ꝛc. Nun soll man finden, was zur Abscisse AD für eine Ordinate gehört. Begreiflich ist die Aufgabe unbestimmt und der Bogen NEO kann unzählig viele Gestalten zwischen N und O haben. Also ist es nur in Ermangelung eines bessern Mittels, daß man DE aus so einer Forml. wie $ax + bx^2 --- = y$ ausdruckt, und also voraussetzt, die krumme Linie sei generis parabolici,



„lici, wie M. ausdrücklich annimmt; und da wird „die Sache immer ungewiſſer, je höhere Potenzen „von x man brauchen muß. Das Interpoliren durch „die Differenzenreihen, wie ich beigelegt habe, ſcheint „mir noch ſicherer. Die, welche die Sinustaf. und „Logar. berechnet, haben ſich ſchon deſſelben bedient. „Allemal aber iſt es ſehr mißlich, zwiſchen ein Paar „weit von einander ſtehende Glieder einzuſchalten“

ꝛc. ꝛc. Göttingen, den 17ten Junii 1779.

A. G. Käſtner.



Erläu-

Erläuterungen über die Käſtneriſche Analyſis des Unendlichen.

Von Quadraturen und Rectificationen, die zum Kreiſe gehören.

§. 273.

Der Werth für $Q = \frac{P. - (2r - 1)}{2.(r + 1)}$ (ſ. die Druckf.) giebt ſich aus §1. daſ. $n = 2$ geſetzt.

Die Reihe für $\sqrt{(1 - x^2)}$, die ſich hier S. 195. befindet, ſteht auch Anal. endl. Gr. §. 625. und in Hrn. Lamberts Zuſätzen zu den logarithmiſchen ꝛc. S. 183. Der allgemeine Ausdruck im Buche zwoer auf einander folgenden Glieder dieſer Reihe wird auch bald begreiflich, wenn man nur bedenkt, daß in ihr der erſte Coefficient zur zwoten Po-

tenz von x, der zweete zur vierten, der dritte zur ſechſten u. ſ. w. und ſo überhaupt der $2t+1$te Coefficient zur $2.(2t+1) = 4t+2$ten Potenz von x gehört.

Wo die allgemeinen Glieder ꝛc. ꝛc. ſie ſind nämlich unter der Geſtalt, die ſie hier haben, jedes folgende Glied der Reihe ſogleich aus dem vorhergehenden zu berechnen. In einem der folgenden Zuſätze (279.) wird gezeigt werden, wie ſich die beiden allgemeinen Glieder zum wirklichen Gebrauch, um das folgende vermittelſt des vorhergehenden zu finden, bequemer ausdrucken laſſe.

Die Conſtante iſt hier ꝛc. ꝛc. Es bedeutet nämlich

$$\int dx \sqrt{(1-x^2)} = \int y\,dx$$

das Stück einer Kreisfläche, das zu einer aus dem Mittelpunkt C genommenen Abſciſſe gehört z. B. für $x = CP$ wäre

$$\int y\,dx = \text{der Fläche } CPMDC.$$

Solche Fläche muß nun für $x = 0$ verſchwinden, alſo muß $Conſt = 0$ ſein.

Ex. Man ſucht den Inhalt von MPCD für $MCP = 60°$. Hier iſt $x = \frac{1}{2}$ für $r = 1$, alſo der geſuchte Inhalt =

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{1280} + \frac{1}{14336} + \frac{5}{589824} + \frac{7}{5767168} \cdots\right)$$

Nun ist

$\frac{1}{48} = 0,0208333$

$\frac{1}{1280} = 0,0007812$

$\frac{1}{14336} = 0,0000697$

$\frac{5}{589824} = 0,0000084$

$\frac{7}{5767168} = 0,0000012$

Summe $= 0,021693$----

Demnach der gesuchte Inhalt $=$

$\frac{1}{2} - 0,021693 = 0,478306$---

wo leicht zu begreifen ist, warum in der sechsten Decimalstelle 6 statt 7 steht.

Daraus liesse sich nun des Bogens MD Länge so finden:

Des Dreiecks MCP Inhalt ist $= \frac{1}{2}$ PC . MP $= \frac{1}{2} \times \sqrt{(1 - x^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1,732050}{8} = 0,216506$. Dies vom vorigen abgezogen, giebt den Inhalt des Kreisausschnitts

$MCD = 0,478306 - 0,216506$

$= 0,26180;$

heißt nun der Bogen MD, β, so hat man

$0,26180 = \frac{1}{2} r . \beta$

also hier $= \frac{1}{2}\beta$

und daher $\beta = 2 . 0,26180$

$= 0,52360$

Dies ist aber der Bogen von $90° - 60° = 30°$, also ist für $r = 1$ der halbe Umkreis $= 6.30° = 6.0,52360 = 3,14160$, oder auch die Verhältnis des Durchmessers zum ganzen Umkreis =

$$1 : 3,14160$$

wo noch nicht um $0,00001$ gefehlt ist, wie die genauere Berechnung (308) zeigt.

§. 274.

Es ist also ꝛc. ꝛc. nämlich der Inhalt des Stücks CDMP. s. die Erl. zum vor. §.

§. 275.

Weil $u = 1 - x$, also $x = 1 - u$, so hat man

$$y = \sqrt{(1 - x^2)}$$

$$= \sqrt{(1 - (1 - u)^2)}$$

$$= \sqrt{(1 - (1 - 2u + u^2))}$$

$$= \sqrt{(2u - u^2)}$$

Uebrigens sollen die beiden allgemeinen Glieder der Reihe am Ende dieses §. wiederum nicht dazu dienen, um jedes Glied aus dem vorhergehenden bequem zu berechnen, sondern blos das allgemeine Gesetz des Fortgangs dieser Reihe zu beweisen. s. 279.

§. 277.

und folglich der Abschnitt ꝛc. ꝛc. Es folgt dieses auch schon aus dem Satze der gemeinen Geometrie, daß sich die Kreisflächen wie die Quadrate ihrer Halbmesser verhalten.

§. 278.

§. 278.

Die Reihe hier unterscheidet sich von der (276.) blos darin, daß für die gegenwärtige der **Durchmesser**, für jene aber der **Halbmesser** $= 1$ ist; und es fällt in die Augen, daß für die gegenwärtige Voraussetzung die Reihe etwas einfacher wird, und daher der Zus. 277. woraus der hier folgt, nicht überflüßig ist.

§. 279.

Ex. Für das Glied, das x^5 enthält, hat man in dem allgemeinen Ausdruck 273. $4t + 3 = 5$, also $t = \frac{1}{2}$, und daher das genannte Glied $=$

$$\frac{-1.1.x^5}{1.2.2^2.5}$$

$$= -\frac{x^5}{40} = \zeta,$$

daraus giebt sich das folgende Glied, das x^7 enthält,

$$= \frac{5.3}{2.3.7} \cdot \zeta \cdot x^2 = \frac{5.x^7}{2.7.40} = -\frac{x^7}{16.7},$$ wie sich gehört, obgleich $2t + 1$ hier nicht ungerade, sondern gerade ist. Ich führe diesen letzten Umstand hier deswegen an, um Anfängern einen falschen Gedanken, auf den sie leicht gerathen könnten, zu benehmen. Alles nämlich, was in diesem Abschnitt vorgetragen worden ist, gründet sich auf 273. Nun ist das. S. 194. vorausgesetzt worden, es solle $2t + 1$ ungerade sein, und so scheinen also die beiden allgemeinen Ausdrücke S. 195. am Ende und hier

S. 200. am Anf. wovon der erſte jeden 2 t ✝ 1ten und der zweete jeden 2 t ✝ 2ten Coefficienten enthält, die Bedeutung zu haben, daß der erſte nur auf jedes Glied paßt, das einen ungeraden, der letzte aber nur auf jedes ſolches Glied, das einen geraden z. E. den 2ten, 4ten u. ſ. w. Coefficienten enthält, und daß alſo die beiden allgemeinen Glieder nur dienten, aus jedem **ungeraden** Glied das zunächſtfolgende **gerade** zu berechnen, aber nicht aus dieſem **geraden** wieder das zunächſtfolgende **ungerade**, ſondern daß jedes **ungerade** nach der Formel S. 195. beſonders berechnet werden müßte. Man muß aber bedenken, daß aus der Vorausſetzung, daß S. 195. r **ungerade** ſein ſollte, gar nichts beſonders folgte. Man hätte eben ſo gut r gerade annehmen können, und würde doch eben das gefunden haben; nur würde man im letzten Fall die Formel für den 2 t ✝ 1ten Coefficienten aus der für den 2 t ✝ 2ten hergeleitet haben, da man ſo umgekehrt aus dem 2 t ✝ 1ten den 2 t ✝ 2ten gefolgert hat. Ueberhaupt würden die beiden Gröſſen P, Q; (S. 194.) weiter keine Veränderung dadurch erlitten haben, als in Anſehung ihres Zeichens; P würde nämlich dadurch verneint und Q bejaht werden, da es ſich bei der vorigen Vorausſetzung umgekehrt verhält; es fällt aber in die Augen, daß dieſer Umſtand S. 195. keine andere Folgen gegeben hätte, und daß man eben ſo für $\sqrt{(1 - x^2)}$ auſſer der 1. lauter verneinte Glieder erhalten würde, und daß daher auch beide allgemeine Glieder S. 195. am E. unverändert geblieben wären. Dies wird Anfängern hinlänglich ſein,

sich zu überzeugen, daß die beiden Formeln dieses 279. §. auf den Umstand, daß 2t + 1 ungerade ist, gar keine Beziehung haben, und daß sie also nicht blos dienen, aus jedem ungeraden Glied das nächstfolgende gerade zu berechnen, sondern auch umgekehrt, aus jedem geraden das nächstfolgende ungerade.

§. 280.

Aus 277. ist

$$\frac{-P}{2^{2t+1}.(4t+5)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+2} = \zeta$$

also $$P = \frac{-2^{2t+1}.(4t+5).\zeta}{\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+2}}$$

$$= -2^{2t+1}.(4t+5).\left(\frac{v}{r}\right)^{-2t-2}.\zeta$$

Ferner aus 277.

$$\frac{Q}{2^{2t+2}.(4t+7)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3} = \theta \quad (*)$$

hier nun den Werth von Q aus 273. substituirt, giebt

$$\frac{-P.(4t+1):2.(2t+2)}{2^{2t+2}.(4t+7)}.\left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3} = \theta$$

$$\mathfrak{P}\ 4$$ oder

(*) weil nämlich in (277.) alle Glieder verneint sind, also auch θ, so müßte das. im Buche eigentlich + Q stehen, weil der Werth von Q (273.) verneint ist, also — Q eigentlich was bejahtes bedeutete.

oder

$$\theta = \frac{-P.(4t+1)}{2.(2t+2).2^{2t+2}.(4t+7)} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3}$$

und hier wieder den zuvor gefundenen Werth von P substituirt, giebt

$$\theta = 2^{2t+1}.(4t+5).\left(\frac{v}{r}\right)^{-2t-2} \cdot \zeta.(4t+1) \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^{2t+3}$$

$$\frac{}{2.(2t+2).2^{2t+2}.(4t+7)}$$

$$= \frac{(4t+5).(4t+1).\zeta.\frac{v}{r}}{4.(2t+2).(4t+7)}$$

welches verneint ist, weil ζ einen verneinten Werth hat.

Ex. Das Glied

$$\zeta = -\frac{1}{16.8.9} \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^4$$

befindet sich in 277. Nun hat das allgemeine Glied daselbst, woraus sich das folgende berechnen läßt, die Potenz $2t+2$, also hat man hier

$$2t+2 = 4$$

und daher $$t = \frac{4-2}{2} = 1$$

und so lassen sich also nun aus diesem einzigen bekannten Gliede alle die folgenden, soweit man will, vermittelst

mittelst der hier gefundenen Formel für den Halbmesser $= r$ leicht berechnen. Für den Durchmesser $= 1$ wäre das erwähnte Glied

$$\zeta = -\frac{1}{8.9} v^4$$

und $r = \frac{1}{2}$ (278.), also

$$\zeta = \frac{-9.5}{4.4.11} \cdot \frac{1}{8.9} \cdot v^4 \cdot \frac{v}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2.5.9}{16.11.8.9} \cdot v^5$$

$$= -\frac{5}{11.64} \cdot v^6$$

wie sich nach 278. gehört.

Das bisherige (273–280) setzt uns also in den Stand, nicht nur für jedes Stück der Kreisfläche, sowohl für Abscissen aus dem Mittelpunkt gerechnet (273.) als für Abscissen vom Anfang des Durchmessers genommen (275.) eine allgemeine Reihe anzugeben, sondern auch diese Reihen soweit man will, es sei für den Halbmesser $= 1$ (279.) oder überhaupt für ihn $= r$ (280.) bequem zu berechnen.

§. 281.

Es ist

$$dAP = d\left(r - \sqrt{(r^2 - s^2)}\right)$$

$$= -d\,(r^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2}(r^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\,(s^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2}s\cdot(r^2-s^2)^{-\frac{1}{2}}\,ds$$

$$= -\frac{s\,ds}{\sqrt{(r^2-s^2)}} = MR$$

Nun iſt M m oder d a =

$$= \sqrt{(mR^2+MR^2)}$$

$$= \sqrt{\left((ds)^2+\frac{s^2\,ds^2}{r^2-s^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{r^2\,ds^2-s^2\,ds^2+s^2\,ds^2}{r^2-s^2}\right)}$$

$$= \frac{r\cdot ds}{\sqrt{(r^2-s^2)}} = \frac{r\cdot ds}{Cof}$$

Man ſetzt nämlich ꝛc. ꝛc. Die Verwandlung des r (52.) in n geſchieht nur deswegen, weil hier r eine Bedeutung hat, und ohne ſolche Verwandlung alſo Verwirrung entſtünde.

Wenn das Glied, deſſen Exponent ꝛc. ꝛc. Dies verſteht ſich von der Integralgleichung. Aus der unendlichen Reihe für $\left(-\frac{s^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ hat man nämlich

$$P = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n\cdot 2^n}$$

Nun iſt in der Integralgleichung das Glied, deſſen Exponent $2n+1$ iſt, oder

$\zeta =$

$$\zeta = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.2.3\cdots n.2^n}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{s^{2n+1}}{r^{2n}}$$

$$= P.\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{s^{2n+1}}{r^{2n}}.$$

also

$$P = \frac{(2n+1).r^{2n}.\zeta}{s^{2n+1}}.$$

oder wie im Buche ausgedruckt,

$$P = (2n+1).\left(\frac{s}{r}\right)^{-2n}\frac{\zeta}{s}$$

Das auf ζ folgende Glied, das also den Exponenten $2n+2$ hat, ist

$$\theta = \frac{P.(2n+1)}{(n+1).2.(2n+3)}\cdot\frac{s^{2n+3}}{r^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+1).\left(\frac{s}{r}\right)^{-2n}.\frac{\zeta}{s}.(2n+1)}{(n+1).2.(2n+3)}\cdot\frac{s^{2n+3}}{r^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2).(2n+3)}.\zeta.\left(\frac{s}{r}\right)^{-2n}.\frac{s^{2n+2}}{r^{2n+2}}$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2).(2n+3)}.\zeta.\left(\frac{s}{r}\right)^2$$

Dieser Ausdruck für θ durch ζ dient hier wiederum, daß man nicht jedes Glied von neuem zu berechnen nöthig hat, sondern allemal aus einem berechneten Glied das nächstfolgende finden kann.

§. 282.

§. 282.

Dies ergiebt sich aus der Gleichung für θ, wenn man in ihr statt ζ die Buchstaben A, B, C--- und statt n nach und nach 1, 2, 3--- setzt, da dann der erste Werth von ζ oder $A = s$ ist, dies giebt den Werth von $B = \frac{1.1.s^2}{2.3.r^2} . A$, und hieraus folgt

$$C = \frac{3.3.s^2}{4.5.r^2} . B$$

u. s. f. Setzte man $s = \frac{1}{2}$ für $r = 1$, so gäbe diese Reihe die Länge des Bogens von 30° bald ziemlich genau. Für $r = s = 1$ erhält man die Länge des Quadranten =

$$A \underbrace{B}_{\frac{1.1}{2.3}} \cdot \underbrace{C}_{\frac{3.3}{4.5}} \underbrace{D}_{\frac{5.5}{6.7}}$$

$$1 + \frac{1.1}{2.3} . A + \frac{3.3}{4.5} . B + \frac{5.5}{6.7} . C---$$

§. 285.

Ich will also von diesem Verfahren 2c. 2c. Das Verfahren, das nun kommt, gründet sich auf den Gebrauch der höhern Differentialen, und zwar der zwoten. Aus der allgemeinen Reihe für $s = a + \alpha a^3$--- sucht man erst einen Ausdruck für $\frac{dds}{da^2}$; für ebendiesen Quotienten giebt sich nun noch ein Ausdruck aus (281.). Beide sind durch endliche Grössen ausgedruckt, und geben, ohne daß man nö-

thig hätte, Grössen auf Potenzen zu erheben, die Werthe für die Coefficienten α, β, γ &c.

Ich nehme da (oder das Differential des Bogens) **unveränderlich an** &c. &c. Es ist schon in den Erläuter. des Abschnitts von den höhern Differentialien erinnert worden, daß diese Voraussetzung, daß eines von den Differentialien, die Funktionen von einander sind, unveränderlich sein soll, gar wohl angeht; nur muß alsdann, wie natürlich ist, das veränderliche Differential durch das unveränderliche anders ausgedruckt werden, als wenn man letzteres auch veränderlich angenommen hätte, welches man wegen (143.) nicht thut. Es kommt also nur darauf an, welches von den Differentialen man unveränderlich setzen soll, also hier ds oder da? und es fällt bald in die Augen, daß beide Voraussetzungen gleichgelten, und einerlei Folge geben müssen, weil in der Natur der Grössen dadurch nichts verändert wird. Nähme man ds unveränderlich an, so folgte aus

$$\frac{ds}{da} = 1 + 3\alpha a^2 \cdots$$

wenn man von neuem differentiirt, zur Linken

$$d\left(\frac{ds}{da}\right) = ds.d(da)^{-1} = -ds.da^{-2}.dda$$

$$= -\frac{ds.dda}{da^2}$$

und zur Rechten $3.2\alpha a\,da + 5.4\beta a^3\,da \cdots$ also durch da dividirt

— ds

$$\frac{-\,ds\,.\,dda}{da^3} = 3.2\alpha a + 5.4\beta a^3 \text{ - - - } (\odot$$

Nun hat man aus (281.)

$$da = \frac{r\,.\,ds}{\sqrt{(r^2 - s^2)}}$$

also quadrirt

$$\frac{ds^2}{da^2} = \frac{r^2 - s^2}{r^2} = 1 - s^2 \text{ für } r = 1,$$

und dies von neuem differentiirt, giebt für die Voraussetzung, daß ds unveränderlich sein soll,

$$-\,ds^2\,.\,2\,da^{-3}\,.\,dda = -\,2\,s\,ds, \text{ also}$$

$$\frac{-\,ds\,.\,dda}{da^3} = -\,s \text{ (C}$$

Beide Gleichungen ⊙ und C geben die dritte

$$-\,s = 3.2\alpha a + 5.4.\beta a^3 \text{ - - - } (\mathbb{Q}$$

welches eben die Gleichung ist, die sich aus denen beiden im Buche für $\frac{dds}{da^2}$ ergiebt. Diese dritte Gleichung für $-\,s$ mit der im Buche für s verglichen, giebt nun eine vierte

$$-\,a - \alpha a^3 - \beta a^5 - \gamma a^7 \text{ - - - - } = 3.2\alpha a + 5.4\beta a^3 + 7.6.\gamma a^5 \text{ - - -}$$

also $-\,a = 3.2\alpha a$, und daher

$$\alpha = -\,\frac{1}{3.2}$$

ebenso

ebenso $-\alpha a^3 = 5.4\beta a^3$, folglich

$$\beta = -\frac{\alpha}{5.4}$$

u. s. w.

Ex. Man soll den Winkel finden, dessen zugehöriger Bogen dem vierten Theil des Halbmessers gleich ist.

Hier ist für $r = 1$,

$A = a = \frac{1}{4} = 0,25000000$

$$B = -\frac{1}{3.2}\cdot\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{6.64} = -0,00260416$$

$$C = \frac{1}{384}\cdot\frac{1}{4.5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{122880} = 0,00000813$$

$$D = -0,00000813.\frac{1}{7.6}\cdot\frac{1}{16} = -0,00000001$$

giebt $s = 0,2474039$

Dies ist nun nach den gemeinen Tafeln der sin 14° 19′, welches also schon ziemlich genau den verlangten Winkel giebt.

§. 286.

Man setze nämlich $\frac{1}{2}b$ statt a, und $\frac{1}{2}c$ statt s in die Reihe für s (285.), so wird

$$\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}b - \frac{\frac{1}{2}b.(\frac{1}{2}b)^2}{3.2} + \left(\frac{\frac{1}{2}b.(\frac{1}{2}b)^2}{3.2}\right).\frac{(\frac{1}{2}b)^2}{4,5} \cdots$$

also $c = b - \frac{b^3}{24} + \frac{b^5}{16.3.2.4.5} - \cdots$

wie im Buche.

§. 287.

Eigentlich läßt sich aus keiner trigonometrischen Linie der zugehörige Bogen finden, weil einer jeden unzählige Bogen zugehören (Alg. 621.). Hier aber versteht man allemal nur den kleinsten von allen diesen Bögen; man verlangt also auch hier nicht eine solche allgemeine Gleichung zwischen einer trigonometrischen Linie und ihrem zugehörigen Bogen überhaupt, sondern nur zwischen derselben und ihrem zugehörigen kleinsten Bogen; die auch an sich wohl möglich, aber hier nur durch unendliche Reihen angeblich ist.

Den Ausdruck

$$\sqrt{2u}\left(1 - \tfrac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}.u^2 - \frac{1}{16.8}.u^3 - \cdots\right)$$

mit $1 - u$ zu multipliciren, darf man nur den einen Factor ($1 - \frac{1}{4}u - \cdots$) erstlich mit 1, dann mit $-u$ multipliciren, d. h. man darf nur jedes Glied der Reihe $1 - \frac{1}{4}u - \cdots$ mit $-u$ multipliciren und das Produkt zu dieser Reihe selbst addiren. So erhält man

$$1 - \tfrac{1}{4}u - \frac{1}{8.4}.u^2 - \frac{1}{16.8}.u^3 - \cdots$$
$$\cdots - \frac{P.u^{2t+1}}{8^{2t+1}} - \frac{Q.u^{2t+2}}{2^{2t+2}} - \frac{R.u^{2t+3}}{2^{2t+3}} - \cdots$$

dazu

Dazu addirt

$$-u + \tfrac{1}{4}u^2 + \frac{1}{8.4}u^3 - - - -$$

$$---- + \frac{P.u^{2t+2}}{2^{2t+1}} + \frac{Q.u^{2t+3}}{2^{2t+2}} ----$$

giebt

$$1 - \tfrac{5}{4}u + \frac{7}{8.4}u^2 + \frac{3}{16.8}u^3 --- + \frac{2P-Q}{2^{2t+2}}u^{2t+2}$$

welches mit $\sqrt{2}u$ multiplicirt den Ausdruck im Buche giebt. Nun geben die Gleichungen für P, Q, R,

$$2P - Q = P.\left(2 - \frac{4t+1}{2.(2t+2)}\right)$$

$$= P.\left(\frac{8t+8-(4t+1)}{2.(2t+2)}\right)$$

$$= P.\frac{4t+7}{2.(2t+2)}$$

Ebenso

$$2Q - R = Q.\left(2 - \frac{4t+3}{2.(2t+3)}\right)$$

$$= Q.\frac{8t+12-(4t+3)}{2.(2t+3)}$$

$$= Q.\frac{4t+9}{2.(2t+3)}$$

Dazu addire man $---- \sqrt{2}u.(1 - \frac{1}{2}u)$

u. s. oder eigentlich die Reihe für $1 - u\sqrt{2}u.$

$(1 - \frac{1}{2}u)$, weil solche wie die Reihe für $2APM$ den Factor $\sqrt{2u}$ hat.

So bekommt man ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich

$$\frac{4}{3}u - \frac{5}{4}u = \frac{16 - 15}{12}u = \frac{u}{12};$$

Ferner

$$\frac{7u^2}{8.4} - \frac{1}{7}u^2 = \frac{5.7 - 3.4}{8.4.5}u^2 = \frac{3}{8.4.5}.u^2$$

Weiter

$$\left(\frac{11.u^4}{128.16} - \frac{1}{4.8.9}\right)u^4 = \frac{11.9 - 4.16}{4.4.8.16.9}.u^4$$

$$= \frac{35}{64.32.9}.u^4;$$

$$\left(\frac{13}{256.32} - \frac{5}{32.16.11}\right).u^5 = \frac{13.11 - 5.16}{16.16.32.11}.u^5$$

$$= \frac{63}{256.32.11}.u^5 \text{ ꝛc.}$$

Die beiden allgemeinen Glieder der Reihe $(1 - u)$ $.\sqrt{2u}.(1 - \frac{1}{2}u)$ sind

$$\frac{4t + 7}{2^{2t+3}.(2t + 2)}.P.u^{2t+2} + \frac{4t + 9}{2^{2t+4}.(2t + 3)}.Q.u^{2t+3}$$

Das erste Glied jener Reihe mit dem ersten dieser unter eine Benennung gebracht, und gehörig addirt, giebt

$$4t + 7$$

$$\frac{4t+7}{2^{2t+3}.(2t+2}.P.u^{2t+2}+\frac{-4}{2^{2t+1}.(4t+5)}Pu^{2t+2}$$

$$=\left(\frac{(4t+7).(4t+5)}{2^{2t+3}.(2t+2).(4t+5)}\right.$$

$$\left.-\frac{4.2^2.(2t+2)}{2^{2t+3}.(2t+2).(4t+5)}\right)P.u^{2t+2}$$

$$=\frac{16t^2+20t+28t+35-32t-32}{(2t+2).(4t+5).2^{2t+3}}.Pu^{2t+2}$$

$$=\frac{16t^2+16t+3}{(2t+2).(4t+5)}.\frac{1}{2^{2t+3}}.P.u^{2t+2}$$

Ebenso giebt das zweite Glied der einen Reihe zum zweiten der andern addirt

$$\left(\frac{(4t+9).(4t+7)}{2^{2t+4}.(2t+3).(4t+7)}\right.$$

$$\left.-\frac{4.2^2.(2t+3)}{2^{2t+4}(2t+3).(4t+7)}\right)Qu^{2t+3}$$

$$=\frac{16t^2+28t+36t-32t-48}{2^{2t+4}.(2t+3).(4t+7)}.Qu^{2t+3}$$

$$=\frac{16t^2+32t+15}{(2t+3).(4t+7)}.\frac{1}{2^{2t+4}}.Qu^{2t+3}$$

§. 288.

Aus 287. ist $\theta =$

$$\frac{16t^2+32t+15}{(2t+3).(4t+7)}.\frac{1}{2^{2t+4}}.Q.u^{2t+2}$$

Aber

$$Q = \frac{4t + 1}{2.(2t + 2)} . P$$

alſo $\theta =$

$$\frac{16t^2 + 32t + 15}{(2t + 3).(4t + 7)} . \frac{1}{2^{2t+4}} . \frac{4t + 1}{2.(2t + 2)} . P . u^{2t+3}$$

und den Werth von P im Buche ſubſtituirt, giebt

$$\theta = \frac{16t^2 + 32t + 15}{(2t + 3).(4t + 7)} . \frac{4t + 1}{2^{2t+5}.(2t + 2)} \times$$

$$. \frac{(2t + 2).(4t + 5).2^{2t+3}}{16t^2 + 16t + 3} . \zeta u^{-2t-2} . u^{2t+3}$$

$$= \frac{(16t^2 + 32t + 15).(4t + 1).(4t + 5)}{(2t + 3).(4t + 7).2^2.(16t^2 + 16t + 3)} . \zeta . u;$$

§. 289.

Ebenſo findet man ꝛc. ꝛc. Man ſetze nämlich

$$16t^2 + 16t + 3 = (4t + \alpha).(4t + \beta)$$

$$= 16t^2 + 4(\alpha + \beta).t + \alpha\beta;$$

alſo die Coefficienten, die zu einerlei Potenz von t gehören, gleich geſetzt, giebt

$$4(\alpha + \beta) = 16$$

oder 1.) $\alpha + \beta = 4$

und 2.) $\alpha\beta = 3$

oder $\alpha = \frac{3}{\beta}$

Dieß giebt in (I.) $\alpha \dotplus \beta = \frac{3}{\beta} \dotplus \beta = \frac{3 \dotplus \beta^2}{\beta}$

man hat also auch

$$3.) \quad \frac{3 \dotplus \beta^2}{\beta} = 4$$

und daher

$$\beta^2 - 4\beta = -3$$

$$\beta - 2 = \sqrt{(-3 \dotplus 4)} = \underline{\dotplus} 1$$

folglich

$$\beta = 2 \underline{\dotplus} 1$$

und

$$\alpha = 4 - 2 \underline{\dotplus} 1 = 2 \overline{\dotplus} 1$$

Demnach

$$16t^2 \dotplus 16t \dotplus 3 = (4t \dotplus 1).(4t \dotplus 3)$$

Daraus wird in 288.

$$\theta = \frac{(4t \dotplus 5).(4t \dotplus 3).(4t \dotplus 5).(4t \dotplus 1)}{(4t \dotplus 1).(4t \dotplus 3).2t \dotplus 3).(4t \dotplus 7).4} . \zeta u$$

$$= \frac{(4t \dotplus 5)^2}{(2t \dotplus 3).(4t \dotplus 7).4} . \zeta u \text{ oder wie im Buche}$$

$$= \frac{(4t \dotplus 5)^2}{(4t \dotplus 7).(4t \dotplus 6).2} . \zeta . u$$

§. 290.

Binomialcoefficient ꝛc. ꝛc. nämlich der Coefficient der gebrochenen Potenz $(1 - \frac{1}{2} u)^{\frac{1}{2}}$ (287.)

Also S 2c. 2c. Dieß erhellet aus den Gleichungen für Q und R (287.). Das Glied, das 287. den Exponenten $2t + 3$ hat, hat den Coefficienten $\frac{2Q - R}{2t + 3}$, daher ist das nächstfolgende Glied, das den Expon. $2t + 4$ hat, $\frac{2R - S}{2^{2t+4}} u^{2t+4}$. Weil nun, um die Reihe für a (287.) vollständig zu haben, zu der Reihe 287. noch die für 2APM aus 276. addirt werden muß, also die Glieder der vollständigen Reihe für a durch die Addition solcher Glieder aus 276. u. 287. entstehen, welche zu einerlei Potenz von u gehören, so nehme man auch aus 276. das Glied, das den Expon. $2t + 4$ hat, und dieß ist, wie das Gesetz des Fortgangs der Glieder daſ. ausweißt,

$$\frac{-4Ru^{2t+4}}{2^{2t+3}(4t+9)} \quad (*)$$

Dies zum vorigen $\frac{2R - S}{2^{2t+4}} . u^{2t+4} =$

$$\frac{(4t+11).R}{3.(2t+4).2^{2t+4}} . u^{2t+4}$$ addirt, giebt

$$\left(\frac{4t+11}{(2t+4).2^{2t+5}} - \frac{4}{(4t+9).2^{2t+3}}\right) Ru^{2t+4} =$$

(*) Die Reihe 276. ist nämlich daſ. mit 2. multiplicirt, folglich muß für 2APM jedes Glied derselben mit $\bullet . 2 = 4$ multiplicirt werden.

$$= \frac{(4t + 11).(4t + 9) - 2^2.4(2t + 4)}{(2t + 4).(4t + 9).2^{2t+5}} . Ru^{2t+4}$$

Der Zähler dieses Bruchs ist $= 16t^2 + 36t +$
$44t + 99 - 32t - 64 = 16t^2 + 48t + 35$.

Nun setze man

$$16t^2 + 48t + 35 = (4t + \alpha).(4t + \beta)$$
$$= 16t^2 + 4(\alpha + \beta).t + \alpha\beta$$

so wird

$$48 = 4(\alpha + \beta) \text{ also}$$

1.) $\alpha + \beta = 12$

Ferner $\alpha\beta = 35$, mithin

2.) $\alpha = \frac{35}{\beta}$

Das giebt in (1.)

3.) $\frac{35}{\beta} + \beta = 12$

oder $\beta^2 - 12\beta = -35$

und $\beta = 6 \pm \sqrt{1}$ oder $= 6 \pm 1$,

also $\alpha = 12 - \beta = 12 - 6 \pm 1 = 6 \mp 1$

und daher der genannte Zähler =

$$(4t + 7).(4t + 5)$$

mithin das ganze Glied =

$$\frac{(4t + 7).(4t + 5)}{(2t + 4).(4t + 9)} \cdot \frac{R}{2^{2t+5}} . u^{2t+4}$$

§. 291.

Weil

$$16t^2 + 32t + 15 = (4t + 5).(4t + 3);\ (289.)$$

ſo iſt aus (287.) das Glied, das den Exponenten $2t + 3$ enthält, oder

$$\theta = \frac{(4t + 5).(4t + 3)}{(2t + 3).(4t + 7)} \cdot \frac{1}{2^{2t+4}} \cdot Qu^{2t+3}$$

$$= \frac{4t + 5}{(4t + 7).2^{2t+3}} \cdot \frac{4t + 3 \cdot Q}{2.(2t + 3)} \cdot u^{2t+3}$$

Nun iſt aus (287.)

$$R = \frac{(4t + 3).Q}{2.(2t + 3)},$$

alſo

$$\theta = \frac{4t + 5}{(4t + 7).2^{2t+3}} \cdot R.u^{2t+3}$$

und daher

$$R = \frac{(4t + 7).2^{2t+3}}{(4t + 5).u^{2t+3}} \cdot \theta$$

Dieſen Werth in die Gleichung am Ende des vor. §.

$$\eta = \frac{(4t + 7).(4t + 5)}{(2t + 4).(4t + 9)} \cdot \frac{R}{2^{2t+5}} \cdot \theta u^{2t+4}$$

geſetzt, giebt

$$\eta = \frac{(4t + 7).(4t + 5)}{(2t + 4).(4t + 9)} \cdot \frac{(4t + 7).2^{2t+3}.\theta.u^{2t+4}}{(4t + 5).u^{2t+3}.2^{2t+5}}$$

$\eta =$.

$$\eta = \frac{(4t+7)^2}{(2t+4).(4t+9).2^2}.\theta.u$$

$$= \frac{(4t+7)^2}{(4t+9).(4t+8).2}.\theta.u$$

§. 292.

Durch diese Ausdrücke erhält man

$$A = 1$$

$$B = \frac{1}{4.3}.u$$

$$C = \frac{3.3}{4.5.2}.B.u = \frac{3.3}{4.3.4.5.2}.u^2 = \frac{3}{8.5.4}.u^2$$

wie (Erl. 287.)

$$D = \frac{5.5}{6.7.2}.\frac{3}{8.4.5}.u^3 = \frac{5}{16.8.7}.u^3$$

$$E = \frac{7.7}{8.9.2}.\frac{5}{16.8.7}.u^4 = \frac{7.5}{64.32.9}.u^4$$

$$F = \frac{9.9}{10.11.2}.\frac{7.5}{64.32.9}.u^5 = \frac{63}{256.32.11}.u^5$$

u. s. w. völlig wie 287. Diese Glieder zusammen addirt und mit $\sqrt{2u}$ multiplicirt, giebt also den Bogen (a) durch den Quersinus u. Man sieht leicht, daß die Sätze 288—292. nur beigebracht worden sind, die Reihe 287. die zur Aufl. der Aufg. schon hinreichend wäre, nur zum Gebrauch bequemer einzurichten, da man in der Reihe, wie sie hier 292.

ausgedruckt ist, allemal jedes Glied aus dem zunächstvorhergehenden leicht finden kann, ohne daß man nöthig hat, jedesmal von neuem zu rechnen.

§. 293.

wenn da beständig 2c. 2c. s. die Erl. zu 285. bei den Worten: **ich nehme da unveränderlich** 2c. 2c. Das Verfahren hier ist dem dortigen völlig ähnlich, und es ließe sich ebensowohl du statt da unveränderlich setzen. Für den im Buche gewählten Fall erhält man für $\frac{ddu}{da^2}$ einen Ausdruck in lauter endlichen Grössen, und es kommt also, wie 285. nur darauf an, noch einen Ausdruck in endlichen Grössen für eben den Quotienten $\frac{ddu}{da^2}$ anzugeben, das sich aus 281. u. 275. leicht thun läßt, weil das zu u gehörige y (275.) hier s ist.

§. 296; 297.

Es ist nicht nöthig, diese Sätze erst besonders zu suchen; sie ergeben sich unmittelbar aus 295. wenn man das. Cos = 1 — Quers. setzt.

§. 298.

vom Quadranten 2c. 2c. d. i. von der Reihe

$$1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{3.3}{4.5} \text{ . B---- Erl, zu 282.}$$

§. 299.

§. 299.

also $1 + t^2 = \frac{1}{1 - s^2}$ und 2c. 2c. Weil nämlich $dt = \frac{da}{1 - s^2}$, so hat man

$$\frac{1}{1 - s^2} = \frac{dt}{da}$$

folglich

$$1 + t^2 = \frac{dt}{da}$$

und

$$\frac{dt}{1 + t^2} = da$$

Die Absicht des Folgenden im Buche bis auf: **wie vorhin** 2c. ist blos zu zeigen, wie sich der nur erwiesene Satz auch aus Betrachtung der Figur herleiten läßt. Nun setze man in Alg. 13. $x = t^2$, so wird

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 \cdots$$

und daher

$$\frac{dt}{1 + t^2} = dt - t^2 dt + t^4 dt - t^6 dt \cdots$$

welches integrirt a giebt. Da übrigens in diesem §. t eine besondere Bedeutung hat, so konnte es nicht wie in den vorigen Absätzen gebraucht werden, daher statt des bisherigen t hier n steht.

§. 301.

§. 301.

Die Reihe für die Quadratur des Kreiſes

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - - -$$

iſt blos deßwegen merkwürdig, weil ſie ſo einfach iſt, und das Geſetz des Fortgangs bei ihr ſo deutlich und geſchwind in die Augen fällt; daß ſie aber auſſerdem zur wirklichen Berechnung ganz unbrauchbar iſt, zeigt die Ordnung, nach der die Glieder auf einander folgen. Der nte Bruch, der auf die 1. folgt, iſt $\frac{1}{2n+1}$ der erſt für $n = 5 = 5.10^0$ keine Zehntheile mehr enthält. Man muß alſo 5. Brüche, oder von der ganzen Reihe, die 1. mitgezählt, 6. Glieder berechnen, um den Inhalt des Kreiſes in Zehntheilchen zu haben. Ebenſo wird für $2n =$ 100, alſo für $n = 50 = 5.10^1$, $\frac{1}{2n+1}$ der erſte Bruch, der keine Hunderttheile mehr enthält, alſo müßte man 50. Brüche oder überhaupt 51. Glieder von der Reihe berechnen, um den Inhalt in Hunderttheilen oder bis auf $\frac{1}{10^2}$ zu erhalten. Auf eben die Weiſe erhellet, daß $n = 500 = 5.10^2$ ſein müßte, um des Kreiſes Inhalt in Tauſendtheilen oder bis auf $\frac{1}{10^3}$ zu haben. Ueberhaupt giebt erſt $n = 5.10^m$ des Kreiſes Inhalt bis auf $\frac{1}{10^{m+1}}$; es iſt nämlich alsdann $2n = 10.10^m =$

10^{m+1}

10^{m+1}, also $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{10^{m+1}+1}$ der erste Bruch, der kein $\frac{1}{10^{m+1}}$ mehr enthält. Will man sich demnach der obigen Reihe bedienen, des Kreises Inhalt in 100. Decimalstellen zu erhalten, so setze man $m+1 = 100$, also $m = 99$; dieß giebt

$$n = 5.10^{99}$$

oder man müßte von der ganzen Reihe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{----}$$

$5.10^{99}+1$ Glieder zusammenrechnen, um den Inhalt oder auch den Umfang auf 100. Stellen zu haben. Weil ich den im Buche erwähnten Comment. Acad. Petrop. nicht besitze, so habe ich diese Berechnung nach meiner Einsicht vorgetragen; sie ist zwar von der Eulerischen Angabe verschieden, indessen sehe ich doch nicht, daß ich gefehlt hätte. Das allgemeine Resultat aus beiden Rechnungen ist übrigens einerlei, daß nämlich Methusalas Alter nicht hinreichend wäre, vermittelst der hier angegebenen Reihe die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreise bis auf $\frac{1}{10^{227}}$ anzugeben, wie man sie doch schon wirklich gefunden hat. (308.)

§. 301.

Die unendliche Reihe, die hier nach Alg. 690. umgekehrt werden soll, ist aus 299.

$$a = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \text{----}$$

Diese

Diese mit der

$$x = gy^{\lambda} + hy^{\lambda+\delta} \text{ ---- Alg. a. a. O.}$$

verglichen, giebt

dort	x	y	λ	δ	1 : λ	(1 + δ) : λ
hier	a	t	1	2	1	3

und die umgekehrte Reihe a. a. O.

$$y = Ax^{1:\lambda} + Bx^{(1+\delta):\lambda} + Cx^{(1+2\delta):\lambda} \text{ ----}$$

verwandelt sich hier in

$$t = a + \alpha a^3 + \beta a^5 + \gamma a^7 \text{ ----}$$

Daraus läßt sich nun vermittelst 299. u. 56. ein doppelter Ausdruck für t^2 herleiten, die alsdann beide einander gleichgesetzt die Coefficienten α, β, γ ꝛc. bestimmen. Man setze nämlich

$$t = a.(1 + \alpha a^2 + \beta a^4 + \gamma a^6 \text{ ---})$$

so hat man

I.) $t^2 = a^2.(1 + \alpha a^2 + \beta a^4 + \gamma a^6 \text{ ----})^2$

und man darf also nur in (56.) $z = a^2$ und $m = 2$ setzen, um t^2 soweit man will zu berechnen. So hat man z. B. das. aus V.

$$A = m\alpha = 2\alpha$$

$$B = \frac{(m-1)A\alpha + 2m\beta}{2} = \frac{2\alpha^2 + 4\beta}{2}$$

$$= \alpha^2 + 2\beta$$

$$C = \frac{(m-2).B\alpha + (2m-1)A\beta + 3m\gamma}{3}$$

$$= 2\alpha\beta + 2\gamma$$

D =

$$D = \frac{(m-3).C\alpha + (2m-2).B\beta + (3m-1)A\gamma + 4m\delta}{4}$$

$$= \frac{-2(\alpha\beta+\gamma).\alpha + 2(\alpha^2+2\beta).\beta + 5.2\alpha\gamma + 8\delta}{4}$$

$$= \frac{8\alpha\gamma + 4\beta^2 + 8\delta}{4}$$

$$= 2\alpha\gamma + \beta^2 + 2\delta$$

u. s. w. Also $(1 + \alpha a^2 + \beta a^4 - - - -)^2 =$

$$1 + 2\alpha a^2 + \left.\begin{matrix}\alpha^2 \\ +2\beta\end{matrix}\right\} a^4 + \left.\begin{matrix}2\alpha\beta \\ +2\gamma\end{matrix}\right\} a^6 + \left.\begin{matrix}2\alpha\gamma \\ +\beta^2 \\ +2\delta\end{matrix}\right\} a^8 - - - -$$

und durchaus mit a^2 multiplicirt, giebt den einen Werth von t^2 wie im Buche.

Der andere Werth von t^2 ergiebt sich aus 299; es ist nämlich das. $dt = da(1 + t^2)$, also

$$\text{II.)}\quad t^2 = \frac{dt}{da} - 1$$

Diesen Ausdruck nun auch in endlichen Grössen zu erhalten, differentiire man

$$t = a + \alpha a^3 + \beta a^5 - - - -$$

das giebt

$$dt = da + 3\alpha a^2 da + 5\beta a^4 da - - - -$$

also $\frac{dt}{da} - 1 = 3\alpha a^2 + 5\beta a^4 - - - -$

und

und die Coefficienten, die in dieſen beiden Werthen von t^2 zu einerlei Potenzen von a gehören, gleichgeſetzt, giebt die Werthe von α, β--- wie im Buche.

§. 306.

Es kommt nämlich darauf an, daß das letzte 2c. 2c. Eigentlich iſt dieß, um völlig gewiß zu ſein, ob man die letzte Decimalſtelle auch noch genau habe, noch nicht hinreichend, ſondern man hat folgendes dabei zu bedenken. Berechnet man $\sqrt{12}$ genau bis auf $n + 1$ Decimalſtellen, und iſt das $m + 1$te Glied der Reihe $\frac{\sqrt{12}}{1} - \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3} + \frac{\sqrt{12}}{5 \cdot 3^2} - \cdots$ das erſte, das ſich in der $n + 1$ten Decimalſtelle anfängt, ſo muß man, um die Summe von $m + 1$ Glieder zu erhalten, $m + 1$ Ziffern aus der $n + 1$ten Decimalſtelle zuſammen addiren; jede von dieſen kann nun, um das äuſſerſte zu ſetzen, die 9 ſein, und ſo könnte man alſo durch Summirung aller $n + 1$ten Decimalſtellen eine Zahl erhalten die $= (m + 1) \cdot \frac{9}{10^{n+1}}$; und dieſe enthält offenbar noch Theile von der nten Decimalſtelle, ſobald $m > 1$ iſt; Theile von der $n - 1$ten für $m > 10$, Theile von der $n - 2$ten für $m > 111$. u. ſ. w. Hat man alſo $\sqrt{12}$ bis auf n Decimalſtellen berechnet, und muß man z. B. über 10. aber unter 111 Glieder berechnen, um auf eines zu kommen, das keine Ziffer mehr von der nten Decimalſtelle enthält, ſo erhält man durch Summirung dieſer Glieder den Umfang des Kreiſes in n Stellen, von denen man aber nur noch

die

die n — 2te Stelle mit völlig mathematischer Gewißheit als richtig beibehalten kann, weil, wenn man noch die n + 1te Stelle mitberechnet hätte, solche bei der Addition noch Einfluß auf die Summe der n — 1ten Stellen hätten haben können, wie eben erwiesen worden ist.

§. 309.

Man findet die Länge der Bögen von 1 — 360° von Grad zu Grad für r = 1 in 27. Decimalstellen berechnet in Hrn. **Lamberts Zusätzen** 2c. Tab. XXIII. S. 146-148. und die Länge der Bögen durch alle Minuten und Secunden hindurch ebendas. S. 149. Auch kommen eben diese Zahlen in den neuen **Schulzischen Tafeln** vor.

§. 316.

Auch kann man **Tempelhofs Anal. des Unendl.** im VIII. **Abschn.** S. 310-322. nachlesen.

Von den Ausschnitten der Hyperbel.

§. 317.

Zu III.

Aus II. ist nämlich

$$-d\varphi = dMAP$$

Nun ist aber aus 299.

$$\frac{d\,\mathrm{tang}\,MAP}{\mathrm{sec}\,MAP^2} = d\,\mathrm{arc}\,MAP$$

also hier $dMAP = -d\varphi = \frac{d\left(\frac{PM}{\omega}\right)}{\frac{AM^2}{\omega^2}}$,

welches das im Buche giebt.

Zu IIII.

Hier ist $\frac{a^2}{8} \log \frac{(2\sqrt{2}).\omega}{a}$ ein Ausdruck, der für $\omega = AG = 1$ verschwindet, weil nämlich für $AG = 1$, $a = 2\sqrt{2}$, so ist für den Fall

$$\frac{2\sqrt{2}.\omega}{a} = \frac{2\sqrt{2}.1}{2\sqrt{2}} = 1 \text{ und } \log 1 = 0;$$

§. 318.

Nun ist $MAm = \frac{1}{2}(x\,dz - z\,dx)$

$$z = \sqrt{(x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} = (x^2 - \tfrac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}$$

also $dz = \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)^{-\frac{1}{2}} d(x^2)$

$$= \frac{x\,dx}{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

woraus sich das übrige im Buche ergiebt.

§. 319.

Aus 317. ist

$$AP = \omega$$

$$PM = \frac{a^2}{8\omega}; \quad b = \frac{4AM \text{ ging}}{4AM \text{ ist}}$$

und

und aus 318.

$$z^2 = x^2 - \tfrac{1}{4}a^2$$

Diese Werthe nun in die Gleichung

$$x^2 + z^2 = AP^2 + PM^2$$

gesetzt, giebt

$$x^2 + x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \omega^2 + \frac{a^2}{64\omega^2}$$

oder

$$2x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = \frac{64\omega^4 + a^4}{64\omega^2}$$

und

$$x^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{64\omega^4 + a^4}{64\omega^2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{64\omega^4 + a^4}{64\omega^2} + \frac{16a^2\omega^2}{64\omega^2}}{2}$$

$$= \frac{64\omega^4 + 16.a^2\omega^2 + a^4}{2.64\omega^2}$$

folglich $x = \frac{8\omega^2 + a^2}{8\omega\sqrt{2}}$

Daraus folgt nun weiter

$$(8\omega.\sqrt{2})x = 8\omega^2 + a^2 \text{ also}$$

$$\omega^2 - x\sqrt{.2.\omega} = -\frac{a^2}{8} \text{ und}$$

$$\omega^2 - x\sqrt{2}.\omega \mp \tfrac{1}{4}x^2.2 = -\frac{a^2}{8} \mp \tfrac{1}{4}x^2.2$$

oder

$$\left(\omega - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{8} \text{ und}$$

$$\omega = \frac{x\sqrt{2}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{x^2 - \frac{1}{4}a^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{x \mp \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{\sqrt{2}}$$

Dieser Werth mit dem untern Zeichen genommen giebt was kleineres, als mit dem obern genommen; zu untersuchen also, ob von dem zweideutigen $\mp$ das obere oder das untere dem AP (fig. 14.) zugehöre, muß man bedenken, wie die Figur beide Werthe von ω giebt. Ist nämlich Ae die verlängerte AC, so ziehe man $M\mu$ durch Ae senkrecht, welche sie in δ schneidet; dadurch wird $x = A\delta$, $z = \delta M = \delta\mu$, und die solchem x zugehörigen Werthe von ω sind AP und $A\pi$, woraus klar ist, daß die Werthe von ω, welche solchen Punkten M, die in dem neben der Asymptote AE herstreichenden Schenkel CD liegen, zugehören, allemal die grössern sind, und daß also in dem doppelten Werth von ω das obere Zeichen der AP, das untere der $A\pi$ zugehört.

Ex. Es sei $AG = 1$; man sucht für $A\delta = 2$ den Inhalt des zugehörigen hyperbolischen Ausschnitts AMCA. Hier ist, wenn er H heißt,

H =

$$H = \tfrac{1}{8} a^2 . \log \left(\frac{4 + 2\sqrt{(4 - \tfrac{1}{4} a^2)}}{a} \right)$$

Nun ist $a = 2\sqrt{2}$ (317. IIII.) also

$$H = \log \left(\frac{4 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) = \log (\sqrt{2} + 1)$$

$$= \log 2{,}410\text{---}$$

Sucht man nun in der obigen Tafel der hyperb. Logarithmen log 241 auf, so findet man

log 241 = 5,48479----

abgezogen log 100 = 4,60517----

giebt H = 0,87962----

§. 321.

Zu 1.

Des Ausschnitts Differential ist $\frac{AM^2 . d\varphi}{2}$

folglich den Werth von $AM = x . \sec \varphi$ substituirt, giebt solches =

$$\tfrac{1}{2} x^2 . \sec \varphi^2 . d\varphi$$

Nun hat man aus Erl. §. 30.

$$d \operatorname{tang} \varphi = \frac{d\varphi}{\operatorname{Cos} \varphi^2} \text{ also}$$

$$d\varphi = \operatorname{Cos} \varphi^2 . d \operatorname{tang} \varphi$$

Dieß statt $d\varphi$ in den Ausdruck für das Differential des Ausschnitts gesetzt, giebt

=

$$dH = \tfrac{1}{2} x^2 . \sec \varphi^2 . d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} x^2 . \sec \varphi^2 . \operatorname{Cos} \varphi^2 . d \operatorname{tang} \varphi$$

Nun iſt aus der Trig.

$$1 : \sec \varphi = \operatorname{Cos} \varphi : 1$$

alſo auch $1 : \sec \varphi^2 = \operatorname{Cos} \varphi^2 : 1$

und $\sec \varphi^2 . \operatorname{Cos} \varphi^2 = 1$

Demnach

$$dH = \tfrac{1}{2} x^2 . d \operatorname{tang} \varphi$$

Zu II.

ſ. die Fig. Erl. 319. wo $C\varepsilon = p$ iſt;

Der Ausdruck

$$\frac{2p}{a} = \operatorname{tang} \varphi$$

giebt

$$\frac{2\,dp}{a} = d \operatorname{tang} \varphi$$

Dieß in die Gleichung

$$dH = \frac{a^2 . d \operatorname{tang} \varphi}{8 . (1 - \operatorname{tang} \varphi^2)}$$

geſetzt, giebt

$$dH = \frac{a^2 . \frac{2\,dp}{a}}{8 . \left(1 - \frac{4p^2}{a^2}\right)}$$

=

$$= \frac{2\,a^3\,dp}{8.(a^2 - 4p^2)}$$

oder wenn man p^2 ohne Coefficienten haben will,

$$dH = \frac{\frac{1}{16}\,a^3\,dp}{\frac{1}{4}\,a^2 - p^2}$$

Zu III.

Die Werthe hier für x und $\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ dienen, den Logarithmen (319. am E.) bequem durch φ auszudrucken; so wird nämlich

$$2x = \frac{a}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$$

Dieß giebt

$$\frac{2x}{a} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$$

und

$$\frac{2\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} = \frac{a.\,\text{tang}\,\varphi}{a.\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$$

also

$$\frac{2x \mp 2\sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} = \frac{1 \mp \text{tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 \mp \text{tang}\,\varphi)}.\sqrt{(1 \mp \text{tang}\,\varphi)}}{\sqrt{(1 \mp \text{tang}\,\varphi)}.\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 \mp \text{tang}\,\varphi)}}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi)}} = \left(\frac{1 \mp \text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}\,\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

folglich der Log. (319. am E.)

$$= \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi} \right)$$

Zu IIII.

Es ist nämlich $\frac{\quad}{\quad} = \text{Hb}$

$$\text{tang } \varphi = \frac{2p}{a}$$

Dieß in (III.) substituirt, giebt

$$1 + \text{tang } \varphi = \frac{a + 2p}{a}$$

$$1 - \text{tang } \varphi = \frac{a - 2p}{a}$$

und

$$\frac{1 + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi} = \frac{(a + 2p) : a}{(a - 2p) : a}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2} a + p}{\tfrac{1}{2} a - p}$$

Vergleichung der Ausschnitte des Kreises und der Hyperbel.

§. 322.

Aus 299. ist

$$da = \frac{dt}{\quad}$$

nun ist $a = \frac{v}{e}$ und $t = \frac{q}{e}$, also

$$d\frac{v}{e} = d\left(\frac{q}{e}\right) \text{ oder}$$

$$\frac{}{1 \mp \frac{q^2}{e^2}}$$

$$dv = \frac{dq}{1 \mp \frac{q^2}{e^2}} = \frac{e^2\, dq}{e^2 \mp q^2}$$

woraus sich $dC = \frac{1}{2} \frac{e^3\, dq}{e^2 \mp q^2}$ ergiebt, oder wenn man den Halbmesser $= r$ setzt,

$$dC = \frac{1}{2} \frac{r^3\, dq}{r^2 \mp q^2}$$

Diesen Ausdruck mit dem

$$dH = \frac{1}{2} \frac{r^3\, dp}{r^2 - p^2} \text{ (321. V.)}$$

verglichen, zeigt für $\mp q^2 = -p^2$, $dC = dH$. $\sqrt{-1}$ oder $C = H.\sqrt{-1}$ wird. Dieß wird (323.) weiter gezeigt, und giebt den Schluß 324.

§. 323.

Diese Vergleichung sinnlicher zu machen, habe ich Erl. 299. den Kreis $\alpha C \beta$, der zum Halbmesser AC gehört, mit beigezeichnet. Einander zuge-

hörige Ausschnitte des Kreises und der Hyperbel sind da CAλ und CAM; als Tangente gehört Cε zu beiden; und heißt für sich betrachtet bei jenem q bei diesem p.

§. 325.

Schon oben (§. 85.) habe ich erinnert, und werde es unten (332.) noch einmal wiederholen, daß der Hyperbel vier Schenkel eigentlich durch eine Ellipse mit einander verbunden werden, deren Ordinaten unmöglich sind.

Nimmt man nämlich (fig. 1.) die Abscissen aus C nach F, so ist $y = \sqrt{\left(bx \mp \frac{bx^2}{a}\right)} = \sqrt{bx} \cdot \left(1 \mp \frac{x}{a}\right)$. Nun ist für jedes verneinte x, das nicht > a ist, $\frac{x}{a}$ ein verneinter eigentlicher Bruch, höchstens $= -1$, für $x = a$; also $1 \mp \frac{x}{a}$ für diesen Fall allemal bejaht, welches mit dem verneinten bx multiplicirt was verneintes giebt, und daher $y = \sqrt{bx} \cdot \left(1 \mp \frac{x}{a}\right)$ unmöglich macht. Für jedes $-x > a$ wird $1 \mp \frac{x}{a}$ verneint, also $bx \cdot \left(1 \mp \frac{x}{a}\right)$ ein Produkt aus zwo verneinten Grös-

sen bejaht, und y wieder möglich. Dieß beweißt die Verbindung der vier hyperbolischen Schenkel durch eine Ellipse (s. 332. Erl.); und es erhellet auch auf solche Art, daß unmögliche Ausschnitte der Ellipse mögliche der Hyperbel, und unmögliche der Hyperbel mögliche der Ellipse sind. Ist die Hyperbel gleichseitig, so wird $b = a$ und die verbindende Ellipse ein Kreis (Alg. 372.), daher auch der Satz (324.) nur auf die gleichseitige Hyperbel geht.

§. 326.

durch lauter mögliche ꝛc. ꝛc. Es ist dieses auch dem Ausdrucke $C = \frac{r^2 \sqrt{-1}}{4}$.

$l \frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}}$ nicht zuwider, da bekanntlich ein Produkt aus zwo unmöglichen Grössen was mögliches geben kann.

§. 327.

Aus dem vorhergehenden läßt sich nun, welches hier die Absicht ist, leicht ein Ausdruck für $\log \frac{1 + u}{1 - u}$ finden. Es ist nämlich

$$\frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}} = \frac{1 - \frac{q\sqrt{-1}}{r}}{1 + \frac{q\sqrt{-1}}{r}}$$

der

der sich in den Ausdruck $\frac{1 + u}{1 - u}$ verwandelt; wenn man für $r = 1$ nur $= q\sqrt{-1} = u$ setzt; das giebt aber

$$q = \frac{u}{\sqrt{-1}} = \frac{u\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = u\sqrt{-1}$$

wie im Buche. Weil nun, wie die gemeine Geometrie lehrt

$$v = \frac{2C}{r}$$

so hat man den Werth von C substituirt,

$$v = \frac{r\sqrt{-1}}{2} \cdot l\frac{r - q\sqrt{-1}}{r + q\sqrt{-1}} \quad (\mathfrak{C})$$

aber v ist der Bogen, der für $r = 1$ zur Tangente $q = u\sqrt{-1}$ gehört; in dieser Bedeutung läßt sich die Gleichung $(\mathfrak{C})$ auch so ausdrucken

$$\text{Bog tang } u\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l\frac{1 - q\sqrt{-1}}{1 + q\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l\frac{1 + u}{1 - u}$$

und

$$\frac{2\,\text{Bog tang } u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = l\frac{1 + u}{1 - u} \quad (\odot$$

Nun ist (299.)

$$a = t.(1 - \tfrac{1}{3}t^2 \mp \tfrac{1}{5}t^4 - \cdots)$$

also hier $u\sqrt{-1}$ statt t gesetzt, giebt

$$\text{Bog tang } u\sqrt{-1} = u\sqrt{-1}.\left(1 - \tfrac{1}{3}u^2(\sqrt{-1})^2 \mp \tfrac{1}{5}u^4(\sqrt{-1})^4 - \cdots\right)$$

$$= u\sqrt{-1}.(1 \mp \tfrac{1}{3}u^2 \mp \tfrac{1}{5}u^4 - \cdots)$$

und dieß verwandelt die Gleichung (⊙) in nachstehende:

$$l\frac{1 \mp u}{1 - u} = \frac{2u\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.(1 \mp \tfrac{1}{3}u^2 \mp \tfrac{1}{5}u^4 - \cdots)$$

welches der Ausdruck 323. ist.

§. 328.

Der Ausdruck II. ergiebt sich nämlich, wenn man in dem vorhergehenden den Zähler und Nenner des Bruchs

$$\frac{1 \mp q\sqrt{-1}}{1 - q\sqrt{-1}}$$

durch $-\sqrt{-1}$ dividirt.

§. 330.

Wegen des Ausdrucks $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$

s. die Erinnerung in den Erl. der Alg. S. 82. wo ich den genannten Ausdruck durch die Bemerkung leicht hätte rechtfertigen können, daß hier $\sqrt{-x}$

eigent-

eigentlich keine absolute Gröſſe bedeutet, ſondern ſtatt der bejahten Wurzel $+\sqrt{-1}$ gebraucht wird.

ſo kommt ꝛc. ꝛc. Es folgt nämlich aus der Gleichung für a (329.)

$$\left(\ldots + \frac{1^{2a}}{\sqrt{-1}}\right) = 1\,\frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$$

oder $-\sqrt{-1}$ ſtatt $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ geſetzt,

$$\left(\ldots - 2a\sqrt{-1}\right) = 1\,\frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$$

weil nun $1e = 1$ iſt, ſo verändert $1e$ als Faktor eine Gröſſe nicht, und es bleibt

$$(-2a\sqrt{-1}).1e = 1\,\frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$$

Es iſt aber

$$(-2a\sqrt{-1}).1e = 1e^{-2a\sqrt{-1}}$$

alſo

$$1e^{-2a\sqrt{-1}} = 1\,\frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$$

oder die Zahlen ſelbſt genommen

$$e^{-2a\sqrt{-1}} = \frac{\gamma - c\sqrt{-1}}{\gamma + c\sqrt{-1}}$$

Zähler und Nenner dieſes Bruchs mit $\gamma - c\sqrt{-1}$ multiplicirt, giebt im Zähler $(\gamma - c\sqrt{-1})^2$, im Nenner $\gamma^2 - c^2(\sqrt{-1})^2 = \gamma^2 + c^2$ oder das

Quadrat

Quadrat des Cos. zum Quadrat des sin. addirt d. i. das Quadrat des Halbmessers $= 1$, und man hat also

$$e^{-2a\sqrt{-1}} = \frac{(\gamma - c\sqrt{-1})^2}{1}$$

oder die Exponenten der Potenz zu beiden Seiten halbirt, giebt die Gleichung im Buche

$$e^{-a\sqrt{-1}} = \gamma - c\sqrt{-1}$$

und ebenso

$$e^{a\sqrt{-1}} = \gamma + c\sqrt{-1}$$

Nun drucke man die Werthe für γ und c nach 239. aus, so erhält man folgendes:

1.) $e^{a\sqrt{-1}} = 1 + a\sqrt{-1} + \frac{1}{2}a^2(\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{6}a^3(\sqrt{-1})^3 \ldots$

$= 1 + a\sqrt{-1} - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a^3 \ldots$

2.) $e^{-a\sqrt{-1}} = 1 - a\sqrt{-1} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3\sqrt{-1} \ldots$

1. und 2. addirt giebt $2 - a^2 \ldots$ und dieß durch 2 dividirt giebt

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2}a^2 \ldots$$

welches die Reihe für x (296.) ist.

Die Reihe (2.) von der (1.) abgezogen, giebt

$$2a\sqrt{-1} - \frac{2}{6}a^3\sqrt{-1} \ldots$$

und solches durch $2\sqrt{-1}$ dividirt, giebt

$$c = a - \frac{1}{6}a^3 \ldots$$

welches die Reihe für s ist (285.) S. 207.

Vervielf-

Vervielfältigung der Winkel vermittelst der Tangenten.

§. 331.

Zu II.

aber für ein gerades n ꝛc. ꝛc. Es folgt nämlich aus der Gleichung

$$\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n = \frac{\varepsilon - y}{\varepsilon + y} \text{ diese}$$

$$-\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n = \frac{y - \varepsilon}{\varepsilon + y} \text{ oder}$$

$$\frac{y - \varepsilon}{\varepsilon + y} = -1 \cdot \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n \quad (\varphi)$$

Nun sind alle gerade Potenzen einer verneinten Grösse bejaht, die ungeraden verneint, also ist $(-1)^n$ nur in dem Fall mit -1 einerlei, wenn n ungerade ist, oder die Gleichung (φ) ist nur für ein ungerades n mit nachstehender gleichgültig:

$$\frac{y - \varepsilon}{\varepsilon + y} = (-1)^n \cdot \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)^n$$

$$= \left((-1) \cdot \left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}\right)\right)^n$$

$$= \left(\frac{x - \varepsilon}{\varepsilon + x}\right)^n$$

Zu V.

Zu V.

Aus ♂ giebt sich

$$(x-\varepsilon)^n \cdot y \pm (x-\varepsilon)^n \cdot \varepsilon = (x \pm \varepsilon)^n \cdot y - (x \pm \varepsilon)^n \cdot \varepsilon$$

also

$$\left((x-\varepsilon)^n - (x \pm \varepsilon)^n\right) \cdot y = -(x-\varepsilon)^n \cdot \varepsilon - (x \pm \varepsilon)^n \cdot \varepsilon$$

und

$$y = \frac{(x-\varepsilon)^n \pm (x \pm \varepsilon)^n}{(x \pm \varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n} \cdot \varepsilon$$

Zu VI.

aus IIII. 2c. 2c. und aus V.

Zu VIIII.

So dienen diese Sätze auch aus der einzigen Tangente von 1. Gr. die Tangenten für alle Winkel durch alle Grade hindurch zu berechnen. Man hat nämlich aus 309.

Bog 1. Gr = 0,0c1745329 - - -

und das giebt aus 301. vermittelst der Formel

$$t = a \pm \tfrac{1}{3} a^3 \pm \tfrac{2}{15} a^5 - \cdot - \cdot -$$ S. 226.

tang 1. gr. = 0,0174551 - - - -

Setzt man nun hier in V. statt n nach und nach 2, 3, 4 u. s. w. so geben die Werthe von y die Tangenten der Bögen von 2 Gr. 3 Gr. 4 Gr. u. s. w. bis auf 90°.

Ex. Es sei $n = 3$, so ist

$$(x \pm 1)^n = x^3 \pm 3x^2 \pm 3x \pm 1.$$

und die Regel V. giebt

$$\text{tg}\, 3° = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1} = \frac{0{,}0174551 \times (0{,}0174551^2 - 3)}{3 \cdot 0{,}0174551^2 - 1}$$

Nun ist, wie folgende Rechnung giebt

0,0174551
0,0174551
0,000 - - - - - - -
017455- - -
12215- - -
0696- - -
085- - -
05- - -
0- - -
0,00030456- - -

$0{,}0174551^2 = 0{,}00030456$, und dieß von 3 abgezogen, läßt 2,9969544; die fernere Multiplication giebt nun den Zähler des Bruchs $= 0{,}0523111$; der Nenner ist nun $1 - 0{,}0091368 = 0{,}9908632$, also

$$\text{tang}\, 3° = \frac{523111}{9908632} = 0{,}052 - - -$$

welches mit der Zahl in den Tafeln noch bis in die Tausendtheile übereinstimmt. Setzt man in V. $n = 2$, so hat man $(x \pm 1)^n = x^2 \pm 2x \pm 1$, also

$$y = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

soll

soll sich nun hier y auf die Tangente beziehen, so muß man, da n gerade ist, den Bruch umkehren, und so erhält man

$$-\text{tang } 2\alpha = \frac{2\,\text{tang }\alpha}{\text{tang }\alpha^2 - 1} \text{ oder}$$

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{2\,\text{tang }\alpha}{1 - \text{tang }\alpha^2}$$

welches die bekannte trigonometrische Formel ist. s. die Trig. 19. S. 6. Zus. Das gegenwärtige dient, die dortige Sammlung trigonometrischer Formeln zu vermehren; so hat man für $n = 3$

$$\text{tang } 3\alpha = \frac{\text{tang }\alpha^3 - 3\,\text{tang }\alpha}{3.\,\text{tang }\alpha^2 - 1}$$

u. s. w.

Zu X.

Dieß giebt die Formel für tang 4α, nämlich

$$\text{tang } 4\alpha = \frac{4\,\text{tang }\alpha.(1 - \text{tang }\alpha^2)}{\text{tang }\alpha^4 - 6\,\text{tang }\alpha^2 + 1}$$

Zu XIII.

Die Absicht ist hier noch zu zeigen, daß der Ausdruck V. für ein gerades n nicht auf + Cot F sondern — Cot F gehe. Die Allgemeinheit des Ausdrucks V. daß er für gerade und ungerade n zugleich gebraucht werden kann, gründet sich nämlich darauf, daß man sowohl für ein gerades als ungerades n allemal einerlei Ausdruck ♂ und ☿ für y erhält, nur

daß y im erſten Fall — Cot F im letztern ✣ tang F bedeutet (IIII.) Setzt man in III. ✣ Cot F = z also $y = \frac{1}{z}$, ſo würde man einen Ausdruck ſtatt ☿ erhalten, der dem ♂ nicht mehr ähnlich wäre, und man könnte alſo den Ausdruck V. alsdann nicht für gerade und ungerade n zugleich gebrauchen.

Beweis, daß einer Zahl unendliche Logarithmen zugehören.

§. 332.

Eigentlich iſt der Satz, der hier bewieſen werden ſoll; daß einer Zahl unendliche Logarithmen zugehören, nicht genau genug ausgedruckt. Man weiß aus 214. daß die Baſis eines logarithmiſchen Syſtems willkührlich angenommen werden kann, und daß alſo jede Zahl als Logarithme einer Zahl, aus welchem Syſtem man will, angeſehen werden kann. So läßt ſich z. B. die Zahl 5. als der Logarithme von 1000, die Zahl 8. gleichfalls, nur wieder in einem andern Syſtem, als der Logarithme von 1000 anſehen. In dieſem Verſtande braucht es keinen Beweiß, daß jedem Logarithmen unendliche Zahlen und umgekehrt jeder Zahl unendliche Logarithmen, nämlich immer ein anderer in einem andern Syſtem, zugehören. Was daher hier geſucht wird, iſt genauer ausgedruckt: ein Beweis, daß jeder Zahl unendliche Logarithmen in ebendem Syſtem zugehören,

gehören, worunter aber nur ein möglicher ist. Kürzer, als hier geschehen ist, und leichter habe ich den Beweiß dieses Satzes oben aus 223. herzuleiten gesucht; und meiner Meinung nach ist der dortige Beweiß auch insoferne überzeugender, wenigstens für Anfänger einleuchtender, weil er mehr als der gegenwärtige, aus der Natur der Logarithmen selbst und der Art, wie sie entstehen, hergeleitet ist.

Zu V.

Hiermit ist der gegebene Satz schon dargethan; nur muß man folgendes dabei bemerken, das auch in andern Fällen seine Anwendung findet s. unten 339. Erl. Es kann für eine gewisse Grösse mehrere Werthe geben, so daß jeder dieser Werthe wieder unendlich viele unter sich begreift; und so verhält es sich im gegenwärtigen Fall mit log b; daß nämlich

$$L \pm 2n\pi\sqrt{-1} = \log b \quad (\mathfrak{Y}$$

ist im Buche erwiesen; daß aber log b keine andere Werthe mehr habe, als die unter der Formel ($\mathfrak{Y}$) enthalten sind, folgt aus dem Vortrage im Buche nicht; also dürfen sich Anfänger nicht vorstellen, daß sie der gegenwärtige Beweiß im Stand setzte, ausser dem einen möglichen Werth von log b auch jeden unmöglichen anzugeben.

Zu VIII.

Aus 330. ist $e^{a\sqrt{-1}} = \gamma \pm c\sqrt{-1} =$ Cos a $\pm$ sin a $\sqrt{-1}$; hiermit $e^{g\sqrt{-1}}$ verglichen, giebt

$$e^{g\sqrt{-1}} = \text{Cof } g + \text{ſin } g\sqrt{-1}$$

und $x = e^{f}.e^{g\sqrt{-1}} = e^{f}.(\text{Cof } g + \text{ſin } g\sqrt{-1})$

Zu XI.

Hier nicht anbringen ꝛc. ꝛc. nämlich dem Scheine nach, ſ. die Erl. der Alg. §. 576. und hier Erl. zu 223.

Zu XII.

Es enthält dieſe Erklärung auch gar nichts ungewöhnliches. So wird Niemand auf den Einfall gerathen, die vier Schenkel einer Hyperbel für verſchiedene krumme Linien zu halten; es ſind nur Theile **einer und ebenderſelben krummen Linie**, und dieß muß man auf eine der vorigen ähnliche Art erklären. Der Umſtand, daß Linien, die für eine **einzige** ſollen gehalten werden, ſtetige Gröſſen ſein müſſen, wird Niemand hindern, den erwähnten Satz vor wahr zu halten, und die Rechtfertigung gelten zu laſſen, daß die vier hyperboliſche Schenkel vermittelſt einer Ellipſe zuſammenhängen, deren Ordinaten unmöglich ſind (85. u. 325.) oder, welches ebenvas iſt, deren Schenkel unmöglich ſind, welches ein dem im Buche ähnlicher Ausdruck iſt: **die logarithmiſche Linie hat einen möglichen Schenkel und unzählich unmögliche.**

Allgemeiner Ausdruck der Seiten ordentlicher Vielecke.

§. 333.

Zu I.

viermal so groß also ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich

$$2l(-\sqrt{-1}) = l(-\sqrt{-1})^2 = l(\mp\sqrt{-1}.\sqrt{-1}) = l - 1$$

welches mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt den halben Umfang giebt.

Zu III.

$$\left(\frac{\sqrt{3} \mp \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^2 = \frac{3 \mp 2\varepsilon\sqrt{3} - 1}{3 - 2\varepsilon\sqrt{3} - 1} = \frac{2 \mp 2\varepsilon\sqrt{3}}{2 - 2\varepsilon\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \mp \varepsilon\sqrt{3}}{1 - \varepsilon\sqrt{3}}$$

§. 334.

Weil der halbe Bogen aus 333. II. $=$

$$\frac{3}{\varepsilon}\, l\, \frac{\sqrt{3} \mp \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$$

so ist der nte Theil desselben oder

$$1.) \text{ Bog tang } x = \frac{3}{n\varepsilon} . l \frac{\sqrt{3} \mp \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}$$

und in 328. Bog tang x statt a, ε statt $\sqrt{-1}$ und x statt q gesetzt, giebt daselbst

$$2.)\ \text{Bog tang.}x = \frac{1}{2\varepsilon} . l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$$

man hat also aus 1. und 2.

$$\frac{3}{n} l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon} = \tfrac{1}{2} l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x} \text{ und}$$

$$\frac{6}{n} l \frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon} = l \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}$$

also die Zahlen selbst statt der Logarithmen gebraucht

$$\left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^{6:n} = \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon + x}.$$

und

$$\varepsilon . \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^{6:n} + \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^{6:n} . x = \varepsilon - x$$

Dieß giebt

$$\varepsilon - \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^{6:n} . \varepsilon = x + \left(\frac{\sqrt{3} + \varepsilon}{\sqrt{3} - \varepsilon}\right)^{6:n} . x$$

oder

$$\varepsilon . \left(\frac{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n}}{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}\right) =$$

$$x . \left(\frac{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n}}{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}\right)$$

Folglich

Folglich

$$x = \frac{\varepsilon \cdot \left((\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} \right)}{(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n}}$$

§. 336.

Den Werth von x (334.) quadrirt, giebt im Zähler

$$\varepsilon^2 \Big((\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} + (\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n} - 2(\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} \cdot (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} \Big)$$

$$= -1 \left((\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} + (\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n} - 2 \cdot 4^{6:n} \right)$$

oder

$$= 2 \cdot 4^{6:n} - (\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n}$$

und so im Nenner

$$(\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} + 2 (\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} \cdot (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}$$

$$= (\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} + 2 \cdot 4^{6:n}$$

also $1 + x^2 =$

$$\frac{(\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} + 2 \cdot 4^{6:n} + 2 \cdot 4^{6:n} - (\sqrt{3} - \varepsilon)^{12:n} - (\sqrt{3} + \varepsilon)^{12:n}}{\left((\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} \right)^2}$$

$$= \frac{4 \cdot 4^{6:n}}{\left((\sqrt{3} + \varepsilon)^{6:n} + (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} \right)^2}$$

Heißt man nun die Seite des ähnlichen innern Vielecks z, so ist, da die Seite des äussern 2x ist, für den Halbmesser = 1,

$$2x : z = \sqrt{(1 \mp x^2)} : 1$$

also

$$z = \frac{2x}{\sqrt{(1 \mp x^2)}}$$

$$= \frac{2\varepsilon\left((\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} \mp \varepsilon)^{6:n}\right)}{(\sqrt{3} \mp \varepsilon)^{6:n} \mp (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4^{3:n}}{(\sqrt{3} \mp \varepsilon)^{6:n} \mp (\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n}}$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot \left((\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} \mp \varepsilon)^{6:n}\right)}{4^{3:n}}$$

$$= \frac{\varepsilon \cdot \left((\sqrt{3} - \varepsilon)^{6:n} - (\sqrt{3} \mp \varepsilon)^{6:n}\right)}{2^{6:n}}$$

$$= \left(\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{-1}}{2}\right)^{6:n} - \left(\frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{-1}}{2}\right)^{6:n}\right) \cdot \sqrt{-1}$$

welches der Ausdruck im Buche ist.

Für $n = 6$ wird $6 : n = 1$, und

$$z = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{-1} - \sqrt{3} - \sqrt{-1}}{2}\right) \cdot \sqrt{-1}$$

$$= \frac{-2\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$= \mp 1$$

Für

Für $n = 3$ wird $6 : n = 2$, also

$$z = \left(\left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{-1}}{2}\right)^2\right)\sqrt{-1}$$

$$= \left(\frac{3 - 1 - 2\sqrt{-3}}{4} - \frac{3 - 1 \mp 2\sqrt{-3}}{4}\right)\sqrt{-1}$$

$$= \frac{-4\sqrt{-3}}{4} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3}$$

weil das verneinte Zeichen hier keine Beziehung hat. Dieß ist die Formel für die Seite des gleichseitigen Dreiecks, die sich auch Anal. endl. Gr. §. 153. befindet, dort $r = 1$ gesetzt ist s. die Erl. a. a. O. wo ich eine allgemeinere Gleichung zwischen Halbmesser und den Seiten des Dreiecks beigebracht habe.

§. 337.

Es ist

$$\frac{\beta \mp b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta \mp b\varepsilon)^2}{(\beta - b\varepsilon).(\beta \mp b\varepsilon)}$$

$$= \frac{(\beta \mp b\varepsilon)^2}{\beta^2 \mp b^2}$$

aber $\beta^2 \mp b^2 = \sin^2 \mp \mathrm{Cos}^2 = 1$, also

$$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta \mp b} = \frac{\beta \mp b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = (\beta \mp b\varepsilon)^2$$

und ebenso

$$\frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi \mp p} = (\pi \mp p\varepsilon)^2$$

§. 338.

§. 338.

Zu III.

So oft als a = c ꝛc. ꝛc. ſ. die Erl. 339.

Zu V.

So ſind das ihre Wurzeln alle ꝛc. ꝛc. ſ. die Erl. 339.

Zu VI.

In einer Gleichung nämlich, die aus den 2n Wurzelgleichungen

$$(a - c).(a + c).(a - 2c).(a + 2c) \text{ - - - } \text{ - - } (a - nc).(a + nc)$$

entſteht, iſt das Glied, welches die 2nte Potenz von c alſo die 2n — 2nte von a enthält, = dem Produkt aus den 2n Factoren $(- c).(+ c).(- 2c).(+ 2c)$ - - - $(- nc).(+ nc) = + c^{2n}.1.4.9\text{--}\text{--}n^2$ wenn n gerade iſt (Alg. 224.). Nun iſt aber dieſes dasjenige Glied, das a° und alſo nichts von der unbekannten Gröſſe, die hier a iſt, enthält; und da ſolches auch $= 1.2.3\text{ - - - }(2n + 1)$ aus IIII. ſo giebt das

$$c^{2n}.1.4.9\text{---}n^2 = 1.2.3\text{---}(2n + 1)$$

Zu VIII.

Eigentlich hat man aus I. und IIII. für ein ungerades n

$$S.\ 1.2.3\text{---}(2n + 1) = 1.2.3\text{---}(2n + 1) - 4.5\text{---}(2n + 1)a^2\text{---} - a^{2n}$$

Um

Um aber eine Gleichung zu erhalten, die völlig die Beschaffenheit einer Gleichung vom 2nten Grade hat, macht man das Glied, das die höchste Potenz von a enthält, also $-a^{2n}$ bejaht, wie x^m (Alg. 221.) Dadurch erhält man nun

$$-S.\ 1.2.3\text{---}(2n\dotplus 1) = -1.2\text{---}(2n\dotplus 1) \dotplus 4.5\text{---}(2n\dotplus 1).a^2\text{---}\dotplus a^{2n}$$

§. 339.

Ich besitze das hier angeführte Werk von **Joh. Bernoulli** nicht, und kann also nicht weiter von seinen Erinnerungen urtheilen. Indessen kann ich nicht läugnen, daß mir beim Durchlesen der Sätze 338. III. u. V. selbst einige Zweifel aufgestosen sind, die mir durch den Vortrag im Buche nicht völlig gehoben zu sein scheinen. Der Satz 338. III. „daß $S = o$, so oft als $a = c$, oder $2c$, oder $3c$ --- oder nc wo n unendlich ist„ schließt für sich den Satz noch nicht aus, daß noch für andere Werthe von a, als die nur erwähnten, vielleicht für unmögliche, auch $S = o$ sein könne; n ist nämlich keine bestimmte Grösse, sondern heißt hier überhaupt unendlich viel; also könnte es ausser den möglichen Wurzeln $a = c$, $a = 2c$ --- noch unmögliche geben (*), die gleichfalls $S = o$ machten, und der Satz im Buche am Ende von III.

„Man

(*) Denn daß es ausser diesen keine mögliche mehr giebt, lehrt die Trig. Da es weiter keine wirkliche Bogen mehr giebt, für welche die Sinussen verschwinden, als die genannten. Diese Note habe ich erst hinzugesetzt,

„Man kann also S = o als eine Gleichung betrachten, die unzählich viel Wurzeln und darunter die genannten hätte.„

bliebe dennoch wahr, aber die Gleichung enthielte alsdann ausser denen im Buche genannten **mögli-chen** Wurzeln noch **unmögliche**, die sich **beide zusammen** durch eine Grösse, die was **unendli-ches** bedeutete, durch n ausdrucken ließen. Nun ist noch eine Gattung von unendlich vielen Wurzeln wegen (V.) vorhanden, wobei sich wiederum noch **unmögliche** befinden könnten, und die sich **zusam-men** gleichfalls wieder durch n anzeigen lassen. Aus dem allem folgt aber, wie mich däucht, nur soviel: Die Gleichung S = o hat folgende Wurzeln

1.) **mögliche bejahte** ohne Zahl
2.) **mögliche verneinte** ohne Zahl
} Dieses sind die im Buche genannten.
3.) vielleicht **unmögliche**

also überhaupt **unendlich viele** (s. die Erl. 332. V.) wie erfodert wird, weil S = o eine Gleichung von unendlich vielen Abmessungen ist. Daher scheint mir der Vortrag im Buche, wie er jetzo ist, noch nicht überzeugend genug, den Satz in V. darzuthun:

„so sind das ihre Wurzeln alle„

weil auch **unmögliche** dabei sein könnten, wie unten (350.);

und

gesetzt, da ich den folgenden Brief schon hatte, und ich hoffe, daß sie das. den Satz (11.) oder die darin vorgelegte Frage beantworten werde.

und also auch nicht die Richtigkeit der Gleichung

$$T = (a^2 - c^2).(a^2 - 4c^2)\text{-----}(a^2 - n^2c^2)$$

weil mir aus dem im Buche Erwiesenen die Unmöglichkeit des Satzes, daß noch andere Wurzelgleichungen da sein könnten, noch nicht zu fliesen scheint, so wenig ich auch sonsten an der Wahrheit der in 338. zu beweisenden Satze zweifle.

Sonst folgten die Sätze III. V. auch schon aus 191. Die Reihe S hat nämlich unendlich viele Folgen und ebensoviele Abwechslungen, und daher unendlich viele bejahte und unendlich viele verneinte Wurzeln. Nun weiß man aus der Trigon. daß unendlich viele sowohl bejahte als verneinte Wurzeln möglich sind — wollte man daraus schliesen, daß also die Gleichung $S = 0$ nun keine unmögliche Wurzeln enthalten könne? Daß dieser Schluß falsch wäre, erhellet aus 223. das. Erl. Die Gleichung

$$\frac{1}{2a} - u - \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 \text{---} \text{ a. a. O. hat gleich-}$$

falls unendlich viele Wurzeln, auch ist a. a. O. gezeigt worden, daß sie unzählig viele unmögliche hat; also wären das der angeführten Gleichung Wurzeln alle? Da aus a. O. erhellet, daß die erwähnte Gleichung ausser den unendlichen unmöglichen Wurzeln in der That noch **eine mögliche** enthält, so wird man auch im gegenwärtigen Fall umgekehrt fragen können, ob es hier in 338. nicht ausser den unendlich vielen **möglichen** Wurzeln III. u. V. vielleicht noch **unmögliche** geben könne? Wenigstens verdiente

diente die Antwort, die allerdings verneint ausfallen muß, wohl einen beſondern Beweiß.

Weil ich dem Hrn. Hofr. Käſtner nicht gerne Urſache zur Unzufriedenheit über meine Erläuterungen, die Er wenigſtens bisher noch ſelbſten Seines Beifalls werth geachtet hat, geben wollte, ſo habe ich die Freiheit gebraucht, dieſem theuern Manne die ganze Erläuterung zu 339. bis an die Worte: **ſonſt folgten die Sätze** ꝛc. die ich erſt nachher noch beigefügt habe, wörtlich zu überſchicken. Er hielte auch dieſe Zweifel einer Beantwortung nicht unwerth. Weil ich übrigens jeden gerne ſelbſten über die Erheb- oder Unerheblichkeit der gemachten Erinnerungen wollte urtheilen laſſen, ſo habe ich lieber meine Erläuterung nebſt des Hrn. Hofraths Antwort jede beſonders herſetzen, als aus beiden zuſammen eine neue Erläuterung ziehen wollen. Hier folgt alſo die ganze Beantwortung unverändert:

Ich ſollte glauben, Ihre Schwürigkeit lieſſe ſich ſo heben!

1.) $S = 0$ iſt eine Gleichung vom Grade $2n$, wo man freylich n unendlich ſetzt, aber doch in allen folgenden Schlüſſen unter n immer ebendieſelbe unendliche Menge verſteht.

2.) In 338. VII. ſind n quadratiſche Factoren anzugeben, deren Product vom Grade $2n$ iſt.

3.) Eben-

3.) Ebendergleichen in 338. VIII.

4.) Da nun S ein Produkt vom Grade 2n ist, so kann es nicht mehr als n quadratische Factoren haben.

5.) Aber n, die es hat, sind anzugeben. (2; 3)

6.) Also hat es keine andere, als die angegebenen.

7.) Ob n endlich oder unendlich ist, darauf kommt hier nichts an, sondern nur darauf, daß n für den Exponenten der Gleichung $S = 0$, und für die 2; 3; angezeigte Menge der Factoren einerley ist.

8.) Hätte $S = 0$ auser den angezeigten 2n Wurzeln noch 2m unmögliche, so wäre S ein Product aus 2 (n ✠ m) quadratischen Faktoren, darunter m unmögliche wären. Und das Product hätte zum höchsten Exponenten 2n ✠ 2m, wäre also nicht $= S$

9.) Es ist wahr, daß wenn n eine unendliche Menge m eine endliche bedeutet, $n \pm m = n$ gesetzt wird, aber das heist nach den ersten Begriffen der Rechnung des Unendlichen nur, $\frac{n \pm m}{n} = 1 \pm \frac{m}{n}$ komme der Einheit so nahe als man will. Hier würde es soviel heissen

$$\frac{y}{a} = 1 - \frac{\mp a^{2n}}{1 - n \mp 1}$$ sey auch

$$= 1 - \frac{\mp a^{2n+2m}}{1 - n \mp m \mp 1}$$

Und das hieße weiter nichts, als daß für $n = \infty$ schon a^{2n} verschwindet (weil man, damit die Reihe sich nähert, $a < 1$ setzt) folglich die folgenden Glieder bis an das $\mp a^{2n+2m}$ auch verschwinden, also den Werth, den die Reihe bis an a^{2n} giebt, nicht ändern.

Für die Zerfällung in Factoren ist im Buche der letzte $1 - \frac{a^2}{n^2 c^2} = 1$ wenn $n = \infty$. Kommen also dazu noch mehr bis an $1 - \frac{a^2}{(n \mp m)^2 c^2}$, so sind sie jeder $= 1$ und ändern nichts.

10.) Also die Voraussetzung $n = \infty$ heißt nur: man kann Factoren bis an den $1 - \frac{a^2}{n^2 c^2}$ soviel nehmen als man will; aber nicht: man kann zu denen, die bis $1 - \frac{a^2}{n^2 c^2}$ gehn, an der Zahl n; noch m andere nehmen, und so aus $n \mp m$ Factoren ein Produkt

dukt vom Exponenten 2n erhalten. Dieses widerspricht sich.

11.) Ich sehe auch nicht, warum Ihnen eben unmögliche Factoren einfallen? Wenn S ausser den n Factoren noch m andere haben könnte, so erhellet nicht, warum es unmögliche seyn müssen. (Nämlich 2m einfache unmögliche, die m quadratische mögliche gäben.)

Ich verharre ꝛc.

Göttingen, den 16. Febr. 1778.

A. G. Kästner.

Auf (11.) habe ich in der Note (*) geantwortet, womit mein theuerster Lehrer, Dem ich für Seine tiefe Herablassung zu unendlichem Dank verbunden bin, hoffentlich zufrieden sein wird.

§. 341.

Zu II.

nachdem n gerade oder ungerade ist ꝛc.

ꝛc. oder nachdem 2n als der Exponent der Potenz von a ein numerus pariter par oder pariter impar ist.

§. 342.

Der Ausdruck $a\sqrt{-1} = x$, giebt $a^2 = -x^2$. Nun ist allemal (338. VII. u. IX.)

$$S = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a^2}{9c^2}\right) \cdots \cdots \left(1 - \frac{a^2}{n^2 c^2}\right)$$

alſo $-x^2$ ſtatt a^2 geſetzt

$$S = \left(1 + \frac{x^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{9c^2}\right) \cdots \cdots \left(1 + \frac{x^2}{n^2 c^2}\right)$$

und dieß mit $a\sqrt{-1} = x$ multiplicirt, giebt den Ausdruck im Buche für $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

Wie die Logarithmen der trigonometriſchen Linien gefunden werden.

§. 343.

Vermittelſt der oben von mir berechneten hyperboliſchen Logarithmen lieſſen ſich die erſten Zahlen vom hyperboliſchen Logarithmen des halben Umfangs ſo finden. Man hat daſelbſt die Logarithmen bis auf den von 500, alſo die Logarithmen aller ungeraden Zahlen von 1 — 499, und daher die Logarithmen der Quadrate

$3^2, 5^2, 7^2 \cdots 21^2$ weil $23^2 > 500$ wäre.

Nun ist

$$\log \text{nat } c = l4 \mp l\left(1 - \tfrac{1}{9}\right) \mp l\left(1 - \tfrac{1}{25}\right) \text{----}$$

$$\text{also} = l4 \mp l\tfrac{8}{9} \mp l\tfrac{24}{25} \mp l\tfrac{48}{49} \text{---} \mp l\tfrac{360}{361} \mp \tfrac{440}{441} \text{--}$$

$$= l4 \mp l8 - l9 \mp l24 - l25 \mp l48 - l49 \text{--}$$

$$\text{---} \mp l360 - l361 \mp l440 - l441 \text{---}$$

Es ist aber

$$l\,441 = 6{,}08904 \text{---}$$

$$l\,440 = 6{,}08677 \text{---}$$

$$\text{also } l440 - l\,441 = -0{,}0022 \text{---}$$

welches das Glied $\mp l\left(1 - \frac{1}{441}\right)$ oder $l\left(1 - \frac{1}{21^2}\right)$

oder von der Reihe

$$l4 \mp l\left(1 - \tfrac{1}{9}\right) \text{----}$$

das 11te ist. Dieß 11te Glied aber enthält noch Tausendtheile, also erhält man durch Berechnung der ersten 11. Glieder dieser Reihe den log nat c nur in Hunderttheilen, und weil man ihn zum wenigsten in Hundertmillionentheilen verlangt, so ist begreiflich, daß die blose Formel (343.) zur wirklichen Berechnung des hyperbolischen Logarithmen von c nicht zu gebrauchen ist. Um deswegen einigermaasen zu zeigen, wie man sich bei wirklicher Berechnung zu verhalten hätte, erlaube man mir noch nachstehendes herzusetzen. Die erste allgemeine Formel für log nat c ist

I.) $\log c = l4 \mp l\left(1 - \tfrac{1}{9}\right) \mp l\left(1 - \tfrac{1}{25}\right) \text{---}$

Nun iſt aus 223.

$$l(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \cdots$$

alſo $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$ u. ſ. w. ſtatt u geſetzt, giebt

II. $\log \text{nat } c = l4 -$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{9} + \frac{1}{2\cdot 9^2} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{4\cdot 9^4} \cdots \\ \frac{1}{25} + \frac{1}{2\cdot 25^2} + \frac{1}{3\cdot 25^3} + \frac{1}{4\cdot 25^4} \cdots \\ \frac{1}{49} + \frac{1}{2\cdot 49^2} + \frac{1}{3\cdot 49^3} + \frac{1}{4\cdot 49^4} \cdots \\ \frac{1}{81} + \frac{1}{2\cdot 81^2} + \frac{1}{3\cdot 81^3} + \frac{1}{4\cdot 81^4} \cdots \\ \frac{1}{121} + \frac{1}{2\cdot 121^2} + \frac{1}{3\cdot 121^3} + \frac{1}{4\cdot 121^4} \cdots \end{array}\right.$$

u. ſ. w.

Addirt man nun die in den vertikalen Reihen unter einander ſtehenden Glieder, ſo laſſen ſich die vorigen unendlichen Reihen auch ſo ausdrucken:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} \cdots$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \frac{1}{121^2} \cdots\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \frac{1}{121^3} \cdots\right)$$

$\frac{1}{4}$.

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\frac{1}{121^4}\cdots\right)$$

u. s. w.

und das giebt folgende bequemere dritte Formel

III. $lc = l4 -$
$$\begin{cases} \frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}\cdots \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{11^4}\cdots\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\frac{1}{11^6}\cdots\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\frac{1}{11^8}\cdots\right) \end{cases}$$

u. s. w.

wo es nur darauf ankommt, dergleichen unendliche Reihen, wie die vier hier angefangenen sind, zu summiren. Nun gehen in allen diesen Reihen die Nenner, ohne auf ihren Exponenten zu sehen, in einer arithmetischen Reihe fort, der Exponent aber bleibt in jeder Reihe unveränderlich; um also solche Reihen zu summiren, muß man die Summe solcher Reihen suchen, deren allgemeines Glied sich so ausdrucken läßt

$$\frac{1}{x^m}$$ (Alg. 9. u. 81.)

Dieß zu bewerkstelligen, werden Kunstgriffe erfodert, von denen im Buche nichts erwähnt worden,

weil der Hr. Aut. nach ſeiner Abſicht ſoviel möglich die Kürze ſuchen mußte. Da ſie indeſſen von ungemeinem Nutzen ſind, und die bisher im Buche vorgetragenen Lehren uns in Stand ſetzen, ſolche hier abzuhandlen, ſo werden ſie doch in dieſen Erläuterungen eine Stelle verdienen.

Von Summirung der Reihen.

I.

Wenn das allgemeine Glied einer Reihe durch die Gleichung

$$\text{☿)} \quad y = X$$

wo X eine Funktion von x ſein mag, beſtimmt wird, ſo kann man ☿ als eine Gleichung anſehen, die einer krummen Linie zugehört, deren Natur alſo zugleich die Natur der Reihe erklärt.

II.

O A ſei ein Stück (fig. 2.) der Abſciſſenaxe M N, und o n die krumme Linie, der die Gleichung $y = X$ zugehört; ferner ſei A N in lauter gleiche Theile A B, B C u. ſ. w. getheilt, und durch ſie die Ordinaten A a, B b u. ſ. w. gezogen, ſo giebt ſich die Summe dieſer Ordinaten A a + B b + C c --- + L l aus folgender Betrachtung:

1. Der Raum O A a o heiſſe A, ſo hat man

$$\frac{dA}{dx} = y = X$$

$$d^2A$$

$$\frac{d^2 A}{d x^2} = \frac{d y}{d x} = P$$

$$\frac{d^3 A}{d x^3} = \frac{d^2 y}{d x^2} = q$$

u. s. w.

wo ich $p = X'$, $q = X''$, $r = X'''$ u. s. w. setzen will.

2. Zu ebender Abscissenaxe beschreibe man die Differentiallinien o'h', o''h'' u. s. w. welche den Gleichungen

$$p = X'$$
$$q = X''$$
u. s. w.

zugehören s. 127. u. 136. und die dortigen Sätze.

3. Wird aus $OA = x$, $OA + AB = x + \Delta x$, so wird aus A, $A + \Delta A = A + \frac{dA}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2 A}{1.2.dx^2} \cdot \Delta x^2 + \frac{d^3 A}{1.2.3.dx^3} \cdot \Delta x^3$ --nach 146.

dort Δx statt c, A statt ω und ΔA statt e gesetzt. Und hier statt der höhern Differentialien die Werthe y, P, q, r --- gehörig substituirt, giebt, wenn man A auf beiden Seiten wegläßt,

$$\Delta A = y \cdot \Delta x + \frac{p \cdot \Delta x^2}{1.2} + \frac{q \cdot \Delta x^3}{1.2.3} + \frac{r \cdot \Delta x^4}{1.2.3.4} \text{ --- } \hbar.)$$

4. Man bezeichne nun die Ordinaten

in der Hauptlinie O h

die 1te A a mit y
= 2te B b = y'
= 3te C c = y''
2c.

in der ersten Differentiallinie o' h'

die 1te A a' mit p
= 2te B b' = p'
= 3te C c' = p''
2c.

in der zwoten Differentiallinie o'' h''

die 1te A a'' mit q
= 2te B b'' = q'
= 3te C c'' = q''
2c.

2c. 2c.

und so bedeute A', A'', A''' u. s. w. die zu diesen Ordinaten y', y'', y''' u. s. w. gehörigen Räume O B b o, O C c o, O D D o u. s. w.

5. Eine kleine Ueberlegung giebt aus ✠ die Folgen

$$\Delta A' = y'\Delta x \pm \frac{p'\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{q'\Delta x^3}{1.2.3} \cdots \quad (\varphi$$

$$\Delta A'' = y''\Delta x \pm \frac{p''\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{q''\Delta x^3}{1.2.3} \cdots$$

2c. 2c.

wo $\Delta A'$, $\Delta A''$ 2c. die Räume B C c b, C D d c 2c. vorstellen. Nun sei N — 1 das Zeichen der vorletzten und N der letzten Ordinate, also in dieser Bedeutung $Kk = y^{N-1}$ und $Ll = y^N$; $Kk' = p^{N-1}$,

p^{N-1}, $Ll' = p^N$ ꝛc. ꝛc. so wird, wie vorhin, KL1k oder

$$\Delta A^{N-1} = y^{N-1}\Delta x + \frac{p^{N-1}.\Delta x^2}{1.2} + \frac{q^{N-1}.\Delta x^3}{1.2.3} + \text{----}$$

6. Die Räume $\Delta A + \Delta A' + \Delta A'' \text{----} + \Delta A^{N-1}$ geben zusammen den Raum AL1a; nennt man diesen also $\mathfrak{A}$, und substituirt gehörig aus ♄, ♀ u. s. w. so erhält man durch ordentliche Addition

$$\mathfrak{A} = (y + y' + y'' \text{---} + y^{N-1}).\Delta x + (p + p' + p'' \text{---} + p^{N-1}).\frac{\Delta x^2}{1.2} + (q + q' + q'' \text{----} + q^{N-1}).\frac{\Delta x^3}{1.2.3} \text{ ꝛc.}$$

also

$$(y + y' \text{----} + y^{N-1}).\Delta x = \mathfrak{A} - (p + p' \text{----} + p^{N-1}).\frac{\Delta x^2}{1.2} - (q + q' \text{----} + q^{N-1}).\frac{\Delta x^3}{1.2.3} \text{ ꝛc. } (\odot$$

7. Nennt man, was in der Hauptlinie $\mathfrak{A}$ heißt, in der 1ten, 2ten, 3ten u. s. Differentiallinie $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ u. s. w. und setzt

$$p + p' \text{--} + p^{N-1} = P$$

$$q + q'$$

$$q + q' \cdots + q^{N-1} = Q$$
$$r + r' \cdots + r^{N-1} = R$$
$$\text{&c.} \quad \text{&c.}$$

so erhält man völlig wie vorhin bei (⊙) nachstehende Gleichungen

$$P.\Delta x = \mathfrak{A}' - \frac{Q.\Delta x^2}{1.2} - \frac{R.\Delta x^3}{1.2.3} \cdots$$
$$Q.\Delta x = \mathfrak{A}'' - \frac{R.\Delta x^2}{1.2} - \frac{S.\Delta x^3}{1.2.3} \cdots \quad (\mathfrak{C}.)$$
$$R.\Delta x = \mathfrak{A}''' - \frac{S.\Delta x^2}{1.2} - \frac{T.\Delta x^3}{1.2.3} \cdots$$
$$\text{&c.} \quad \text{&c.}$$

Diese Werthe nach der Reihe, den ersten mit $\frac{\Delta x}{1.2}$, den zweeten mit $\frac{\Delta x^2}{1.2.3}$, den dritten mit $\frac{\Delta x^3}{1.2.3.4}$ u. s. w. multiplicirt, und die Werthe von $Q.\Delta x$, $R.\Delta x$ u. s. w. überall gehörig substituirt, giebt in ⊙

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$$
$$- (p + p' \cdots + p^{N-1}).\frac{\Delta x^2}{1.2} = - P.\Delta x.\frac{\Delta x}{1.2}$$
$$= - \frac{\mathfrak{A}'.\Delta x}{1.2} + \frac{Q.\Delta x^3}{1.4} \text{ &c.}$$
$$= - \frac{\mathfrak{A}'.\Delta x}{1.2} + \mathfrak{A}''.\frac{\Delta x^2}{4} \text{ &c.}$$

Ebenso

Ebenso $-(q \pm q' \cdots \pm q^{N-1}) \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} = -$

$Q.\Delta x. \frac{\Delta x^2}{1.2.3} = -\frac{A''.\Delta x^2}{6}$ ꝛc. Dieß zum vorigen $\frac{A''.\Delta x^2}{4}$ addirt, giebt $(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}).\ A''.\Delta x^2$

$= \frac{A''.\Delta x^2}{12}$, und so ergiebt sich überhaupt aus (⊙) in (6.) die Reihe

$(y \pm y' \cdots \pm y^{N-1}).\Delta x = A - \frac{A'.\Delta x}{1.2} \pm$

$\frac{A''.\Delta x^2}{12} - \frac{A^{IV}.\Delta x^4}{720} \pm \frac{A^{VI}.\Delta x^5}{30240}$ ꝛc. (♀

wo das Gesetz des Fortgangs erst gehörig entwickelt werden muß.

8. Man setze also statt der Reihe zur Rechten diese:

$$A \pm \alpha A' \Delta x \pm \beta A'' \Delta x^2 \pm \gamma A''' \Delta x^3 \cdots (\sigma$$

und substituire aus den Gleichungen ⊙ und ☾ in (7.) die Werthe von A, A', A'' ꝛc. so erhält man

ℵ)

$$A = (y \pm y' \pm y'' \cdots \pm y^{N-1}).\Delta x$$

$$\pm \frac{P.\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{Q.\Delta x^3}{1.2.3} \pm \frac{R.\Delta x^4}{1.2.3.4}$$ ꝛc.

$\pm \alpha$

$$\text{✠}\alpha\mathfrak{A}'.\Delta x = \text{✠}\frac{\alpha.P.\Delta x^2}{1} \text{✠}\frac{\alpha.Q.\Delta x^3}{1.2} \text{✠}\frac{\alpha.R.\Delta x^4}{1.2.3}\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{✠}\beta\mathfrak{A}''\Delta x^2 = \text{✠}\frac{\beta.Q.\Delta x^3}{1} \text{✠}\frac{\beta.R.\Delta x^4}{1.2}\ \text{ꝛc.}$$

$$\text{✠}\gamma\mathfrak{A}'''\Delta x^3 = \text{✠}\frac{\gamma.R.\Delta x^4}{1}\ \text{ꝛc.}$$

ꝛc. ꝛc.

Nun giebt hier die Summe der Glieder auf der linken Seite wegen ☿ und ♀ die Grösse zur Linken in (♀) $(y \text{✠} y' \text{----} \text{✠} y^{N-1}).\Delta x$, also müssen auch zur Rechten in ℵ alle Glieder zusammen addirt die nur genannte Grösse geben, und daher in ℵ die Summe aller Glieder, ausser dem ersten von $\mathfrak{A} = 0$ sein. Man setze also die Summe der Coefficienten, die in einerlei Grösse $P.\Delta x^2$, $Q.\Delta x^3$, $R.\Delta x^4$ ꝛc. multiplicirt sind, $= 0$, und verfahre wie Alg. 631. so erhält man vermittelst der Gleichungen

$$\alpha \text{✠} \tfrac{1}{2} = 0$$

$$\beta \text{✠} \frac{\alpha}{1.2} \text{✠} \frac{1}{1.2.3} = 0$$

$$\gamma \text{✠} \frac{\beta}{1.2} \text{✠} \frac{\alpha}{1.2.3} \text{✠} \frac{1}{1.2.3.4} = 0$$

$$\delta \text{✠} \frac{\gamma}{1.2} \text{✠} \frac{\beta}{1.2.3} \text{✠} \frac{\alpha}{1.2.3.4} \text{✠} \frac{1}{1.2.3.4.5} = 0$$

ꝛc. ꝛc.

die Werthe der Coefficienten

$\kappa =$

$$\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\beta = +\frac{1}{12}$$

$$\gamma = 0 \text{ daher } A''' \text{ in } \varphi \text{ fehlt}$$

$$\delta = -\frac{1}{720}$$

$$\varepsilon = 0 \quad \text{ꝛc.}$$

auf eine bequeme und leichte Weise.

9. Es kommt also nur noch darauf an, die Werthe der Grössen A', A'' ꝛc. in (φ) (7.) zu bestimmen, da der Werth von

$$y + y' + \text{----} + y^{N-1} + y^{N}$$

oder die Grösse zur Linken von (φ) $+ y^{N}$, nur durch x dividirt die gesuchte Summe der Ordinaten ist. Dieß läßt sich so thun.

Aus 4. weiß man, daß p, p', p'', ꝛc. q, q', q'' ꝛc. r, r', r'' ꝛc. die ersten, zwoten, dritten ꝛc. Ordinaten der 1ten, 2ten, 3ten ꝛc. Differentiallinie sind. Stellt man sich nun z. B. an a eine Tangente gezogen vor, und setzt die zugehörige Subtangente $= 1$, und den Winkel, den Subtangente und Tangente mit einander machen, $= \varphi$; so ist bekanntlich

$$dy : dx = y : \text{Subt}$$
$$= \text{tang } \varphi : 1$$

Aber aus (1.) ist

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

also $p = \text{tang}\, \varphi$

und wenn man auf eben die Art φ' φ'' ꝛc. die Winkel nennt, welche Subtangente und Tangente, die zu a′, a″ ꝛc. gehören, mit einander machen, ſo wird auch

$$q = \text{tang}\, \varphi'$$
$$r = \text{tang}\, \varphi''$$

ꝛc.

Man hat alſo folgende Gleichungen

$$dy : dx = p : 1$$
$$dp : dx = q : 1$$
$$dq : dx = r : 1$$

ꝛc.

Demnach

$$p \,.\, dx = dy$$
$$q \,.\, dx = dp$$
$$r \,.\, dx = dq$$

ꝛc.

und dieß integrirt, giebt, weil $\int p\, dx = OAa'o'$, $\int q\, dx = OAa''o''$, $\int r\, dx = OAa'''o'''$ ꝛc. iſt,

$OAa'o' = \int(dy) = y$ $\qquad$ $OLl'o' = y^N$

$OAa''o'' = \int(dp) = p$ daher auch $OLl''o'' = p^N$.

$OAa'''o''' = \int(dq) = q$ $\qquad$ $OLl'''o''' = q^N$.

ꝛc. $\qquad$ ꝛc.

Dieſe Räume nun von einander abgezogen, giebt

$$A' = y^N - y$$

$A'' =$

$$\mathfrak{A}'' = p^N - p$$
$$\mathfrak{A}''' = q^N - q$$

2c.

10. Die nur gefundenen Werthe statt $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ 2c. in $\dagger$ (8.) gesetzt, giebt, wenn man $-\frac{1}{2}$ statt α setzt, und $y^N . \Delta x$ zu beiden Seiten addirt,

$$(y + y' \text{----} + y^N) . \Delta x = \mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}(y^N + y) . \Delta x + \beta (p^N - p) . \Delta x^2 + \gamma (q^N - q) \Delta x^3 \text{ 2c. } (\equiv$$

11. Statt p^N, q^N, r^N 2c. kann man auch $\frac{dy^N}{dx}$, $\frac{d^2 y^N}{dx^2}$, $\frac{d^3 y^N}{dx^3}$ 2c. setzen. Und das verwandelt die Gleichung $\equiv$ (10.) in nachstehende:

$$(y + y' \text{----} + y^N) . \Delta x = \mathfrak{A} + \tfrac{1}{2}(y^N + y) . \Delta x + \beta \left(\frac{dy^N}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) . \Delta x^2 \text{----}$$

12. oder die gesuchte Summe der Ordinaten

$$y + y' \text{----} + y^N = \frac{A^N - A}{\Delta x} + \tfrac{1}{2}(y^N + y) + \beta \left(\frac{dy^N}{dx} - \frac{dy}{dx} \right) \Delta x \text{ 2c.}$$

wenn man nämlich in der letzten Gleichung (11.) $A^N - A$ statt $\mathfrak{A}$ setzt, und durchaus mit Δx dividirt. Man sieht übrigens, daß man die Räume A und A^N aus der Gleichung für die Hauptlinie $y = X$ bestimmen müsse.

III.

Das bisherige ist hinreichend, folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen:

Die Summe von n Gliedern einer Reihe, deren allgemeines Glied

$$y = x^m$$

ist, zu finden.

Aufl. 1. Setzt man hier fürs erste $x = a$, und läßt es dann nach und nach um einerlei $\triangle x = b$ zunehmen; so ergeben sich dadurch folgende Werthe von y

$$a^m, (a + b)^m, (a + 2b)^m \text{---} (a + nb)^m$$

und die Aufgabe verlangt also eigentlich die Summe der Reihe

$$a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m \text{---} + (a + nb)^m$$

s. die Zusätze zu den Erl. der Alg. §. 724.

2. Was also in II. y^N genannt wurde, ist hier $(a + nb)^m$

3. Der Werth von A oder die Quadratur des Raums OAao giebt sich hier so:

Aus der Gleichung

$$y = x^m$$

wird

$$y\,dx = x^m\,dx$$

also

$$\int y\,dx = \int x^m\,dx$$

$$= \frac{(m+1).x^m\,dx}{m+1}$$

$$= \frac{1+m x^{m+1}}{m+1}$$

also aus (1.)

$$A = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

und $$A^N = \frac{(a+nb)^{m+1}}{m+1} = z$$

4. Ueberdas hat man auch aus 144. die Werthe der Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m.(m-1).x^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m.(m-1).(m-2).x^{m-3}$$ und

also statt x, a; und statt y^N, $a+nb$ gesetzt (2.) giebt hierin (II. 12.)

$$\frac{dy}{dx} = ma^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m.(m-1).a^{m-2}$$

&c.

$$\frac{dy^N}{dx} = m.(a+bn)^{m-1}$$

$$\frac{d^2yN}{dx^2} = m.(m-1).(a+bn)^{m-2}$$

5. Man hat alſo zur Rechten in (II. 12.) alle Gröſſen, die zur Summirung der Reihe $a^m + (a+b)^m \cdots + (a+nb)^m$ erfodert werden, und wenn die Summe S_{1+m} heißt, ſo wird

$$S = \frac{(a+nb)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1).b} + \tfrac{1}{2}\left((a+nb)^m + a^m\right)$$
$$+ \beta.mb.\left((a+bn)^{m-1} - a^{m-1}\right) + \delta b^3$$
$$.m.(m-1).(m-2) \times \left((a+bn)^{m-3} - a^{m-3}\right)$$
$$+ \zeta b^5.m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)$$
$$\times \left((a+bn)^{m-5} - a^{m-5}\right) \cdots$$

wo das Geſetz des Fortgangs deutlich genug in die Augen fällt, und die Coefficienten $\alpha, \beta, \delta, \zeta, \cdots$ aus II. 8. bekannt ſind.

IIII.

Setzt man $n = \infty$ und (nimmt) m verneint, ſo erhält man die Summe der Reihe

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{(a+b)^m} + \frac{1}{(a+2b)^m} \cdots \text{in infinit.}$$

in der man die Brüche $\frac{1}{a+nb}$ und die Potenzen davon wegen $n = \infty$ wegläßt. Dadurch erhält man nun, wenn man die beiden Coefficienten $\gamma, \varepsilon, = 0$ wegläßt, das erſte Glied von $S =$

$$\frac{-a^{-(m-1)}}{-(m-1).b} = \frac{1}{(m-1).a^{m-1}.b};$$

das

das zweite $= \frac{1}{2}a^{-m} = \frac{1}{2a^m}$

das dritte $= \frac{1}{\alpha} \mp \frac{1}{\alpha}$

$$-\beta.mb.-a^{-(m+1)} = \frac{\mp\beta.mb}{a^{m+1}}$$

das vierte $=$

$$\delta b^3.-m.-(m\mp1).-(m\mp2).-a^{-m+3}$$

$$= \frac{\delta b^3.m.(m\mp1).(m\mp2)}{a^{m+3}}$$

das sechste $=$

$$\zeta b^5.-m.-(m\mp1).-(m\mp2).-(m\mp3).-(m\mp4).-a^{-m+5} =$$

$$\frac{\zeta b^5.m.(m\mp1).(m\mp2).(m\mp3).(m\mp4)}{a^{m+5}}$$

wo, die Glieder mit γ, ε, dazugerechnet, alle Glieder mit $+$ und $-$ abwechseln müssen. Nennte man die Griechischen Coefficienten des $2r$ten und $2r\mp1$ten Glieds ψ, ϱ, so wäre das $2r$te Glied $=$

$$\frac{\psi.b^{2r-1}.m.(m\mp1)\text{----}(m\mp2r-2)}{m\mp2r-1}$$

und das $2r\mp1$te $=$

$$\frac{\varrho.b^{2r}.m.(m\mp1)\text{----}(m\mp2r-1)}{a^{m\mp2r}}$$

Setzt man nun statt a, b und m andere und andere Werthe, so erhält man dadurch die Summen von

unzählich vielen Reihen, z. B. für $a = 3$, $m = 2$ und $b = 2$, die Summe von

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \cdots \text{ in infinit.}$$

so nahe man sie verlangt.

Ich habe hier alles soviel möglich in die Kürze zu fassen gesucht, und ich hoffe, daß es hinreichend sein wird, Anfängern die nöthigen Begriffe von der Anwendung der höhern Analysis auf die Summirung der Reihen beizubringen. Weitläuftiger findet man diese Materie auch beim Tempelhof Anal. des Unendl. I. Th. XIII. Abschn. ausgeführt, dem ich in der Ordnung des Vortrags hier meistens gefolgt bin.

Nach Vorausendung dieser vier Absätzen setze man nun oben in der dritten Formel für log nat c die erste Reihe

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \cdots = \alpha$$

die zwote

$$\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} \cdots = \beta$$

die dritte $= \gamma$ u. s. w. so giebt die vorerwähnte Formel folgende Zahlen

$$\alpha =$$

$\alpha = 0,233\ 700\ 550\ 1$
$\beta = 0,014\ 678\ 031\ 6$
$\gamma = 0,001\ 447\ 076\ 6$
$\delta = 0,000\ 155\ 179\ 0$
$\varepsilon = 0,000\ 017\ 041\ 3$
$\zeta = 0,000\ 001\ 885\ 8$
$\eta = 0,000\ 000\ 209\ 2$
$\theta = 0,000\ 000\ 023\ 2$
$\iota = 0,000\ 000\ 002\ 5$

das giebt nun

$\alpha = 0,233\ 700\ 550\ 1$
$\frac{1}{2}\beta = 0,007\ 339\ 015\ 8$
$\frac{1}{3}\gamma = 0,000\ 482\ 358\ 8$
$\frac{1}{4}\delta = 0,000\ 038\ 794\ 7$
$\frac{1}{5}\varepsilon = 0,000\ 003\ 408\ 2$
$\frac{1}{6}\zeta = 0,000\ 000\ 314\ 3$
$\frac{1}{7}\eta = 0,000\ 000\ 029\ 8$
$\frac{1}{8}\theta = 0,000\ 000\ 002\ 9$

also die Summe $= 0,241\ 564\ 474\ \cdots$

Nun ist aus der obigen Tafel

log nat 4 $= 1,386\ 294\ 361$
davon abgezogen $0,241\ 564\ 474$

giebt log nat c $= 1,144\ 729\ 88\ \cdots$

wo die achte Decimalstelle noch sicher ist.

Diese Zahl nun mit der 0, 434 --- (230.) multiplicirt

1, 144 729 88
1, 434 294 48

0, 457 891 952
34 341 894
4 578 916
228 844
103 023
4 576
456
88

giebt log brigg c = 0, 497 149 ---

§. 344.

Wenn man log c, $\log \frac{m}{2n}$ und $\log\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right)$ aus 343. und den obigen Tafeln als bekannt annimmt, übrigens aber hier wieder wie mit l c (343.) verfährt, so hat man

$$\log \text{nat sin} \frac{mc}{2n} = \log c + \log \frac{m}{2n} + \log\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right)$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} \cdots \right) \\ + \frac{m^4}{2n^4} \cdot \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} \cdots \right) \\ + \frac{m^6}{3n^6} \cdot \left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} \cdots \right) \\ \text{&c.} \end{array} \right.$$

und

$$\text{und } \log \text{Cof} \frac{mc}{2n} = \log\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \frac{m^2}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \cdots\right) \\ + \frac{m^4}{2n^4} \cdot \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} \cdots\right) \\ + \frac{m^6}{3n^6} \cdot \left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} \cdots\right) \\ \text{&c.} \end{array} \right.$$

Wendet man nun hierauf wieder das, was von Summirung der Reihen ist gesagt worden, gehörig an, so ergeben sich die Logarithmen der Sinussen und Cosinussen, wie zuvor der von c. Es fällt in die Augen, daß man für diese Logarithmen lauter verneinte Werthe erhalten wird. Die Logarithmen der Cosinussen von Bögen unter 45° sind nämlich mit den Sinussen von Bögen über 45° einerlei, und umgekehrt. Nun bestehen alle Cos. aus einer verneinten Summe bejahter Reihen $+ \log\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)$; es ist aber $1 - \frac{m^2}{n^2} < 1$ oder ein eigentlicher Bruch, also $\log\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)$ gleichfalls verneint, und daher die Logarithmen aller Cosinussen und Sinussen verneint. Die Ursache davon ist die, weil hier alle trigonometrische Linien für den Halbmesser $= 1$ aus-

man sie in einem besondern Abschnitt, etwa nach gedruckt werden, und daher alle sin und Cos eigentliche Brüche sind, deren Logarithmen verneint sein müssen. Wollte man also die hyperbolischen Logarithmen dieser trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 10000000 haben, so müßte man zu denen, die hier gefunden werden, nach log nat 10000000 = log nat 10^7 = 7. log nat 10 oder

16, 11809 56509 - - - -

addiren; und die Zahlen, die solchergestalt herauskommen, mit 0,434 - - - (230.) multiplicirt, giebt erst die Logarithmen, wie sie in den gewöhnlichen Tafeln stehn.

§. 345.

die briggischen 2c. 2c. aber nicht wie sie in den Tafeln stehn. s. die Erl. zum vor. §. am Ende.

§. 346.

Imgleichen giebt es Vortheile 2c. 2c. Dergleichen sind die, welche ich 343. und 344. beigebracht habe.

Lehnsätze von Zerlegung gebrochener Funktionen in einfache.

Diese Sätze hier 347 - 371. die die Zerlegung gebrochener Funktionen in Glieder (Alg. 1.) nicht in ihre Faktoren betreffen, gründen sich auf keine Rechnungen aus der Anal. des Unendl. Ihre eigentliche Stelle wäre in der Anal. endl. Gröss. wo

272. bequem hätte abhandlen können. Deßwegen sind es hier im Grunde nur **Lehnsätze**, die aber, wegen ihres Gebrauchs in der Folge, nicht wohl wegbleiben konnten.

§. 348.

s. Alg. 31.

§. 352.

s. 174. Lehrs.

§. 354.

man setze es also = 2c. 2c. Soll nämlich N sowohl durch P als durch Q theilbar sein, so muß es eine Zahl sein, die unter ihren Faktoren auch P und Q hat; das giebt, wenn H eine ganze Zahl bedeutet, den einfachsten Ausdruck

$$N = H.P.Q$$

und dieß statt N in die Gleichung

$$NT \mp \frac{N.P.V}{Q} = M.P$$

gesetzt, giebt

$$H.P.Q.T \mp \frac{H.P.Q.P.V}{Q} = M.P$$

also

$$H.(Q.T \mp P.V) = M$$

$$\frac{M}{N} = \frac{H.(QT \mp PV}{H.P.Q};$$

und

das heißt also, wenn

$$\frac{M}{N} = \frac{QT \mp PV}{P.Q}$$

sein

sein soll, so können beide Brüche nicht anders in ihren Zahlen von einander verschieden sein, als daß M ein Vielfaches vom Zähler und N ein Vielfaches vom Nenner des andern Bruchs ist, weil H allemal eine ganze Zahl ist. Die kleinste Zahlen, die man sich unter M und N gedenken kann, sind demnach für $H = 1$, $Q.T \mp P.V$ und $P.Q$, und der Bruch $\frac{Q.T \mp P.V}{P.Q}$ oder $\frac{\frac{T}{P} \mp \frac{P}{Q}}{}$ läßt sich also nicht weiter aufheben.

§. 355.

Hier ist

$$\frac{T.Q \mp V.P}{P.Q} = \frac{S.T \mp R.V}{H.R.S}$$

aber $P = H.R$, $Q = H.S$, also $R = \frac{P}{H}$, und $S = \frac{Q}{H}$; dieß in die vorige Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{T.Q \mp V.P}{P.Q} = \frac{\frac{Q}{H}.T \mp \frac{P}{H}.V}{\frac{P}{H}.Q}$$

wo $\frac{Q}{H}$, $\frac{P}{H}$ ganze Zahlen und $< Q$, P sind; daß sich also für diesen Fall Zähler u. Nenner des Bruchs $T.Q$

$\frac{T.Q \dotplus V.P}{P.Q}$ in kleinern Zahlen ausdrucken lassen.

§. 356.

Es ist nämlich

$$\frac{M}{N} = \frac{T.Q \dotplus V.P}{P.Q} = \frac{S.T \dotplus R.V}{H.R.S}$$

also, wenn man H.R.H.S statt N setzt,

$$\frac{M}{H.R.H.S} = \frac{(S.T \dotplus R.V).H}{H.R.H.S}$$ und

$$\frac{M}{H} = S.T \dotplus R.V$$

§. 357.

auf einen unveränderlichen Theil kommt ꝛc. ꝛc. oder allgemeiner: bis man auf einen Rest kommt, worin die höchste Potenz von z geringer ist, als die höchste Potenz, die von ihr im gegebenen Zähler oder im Dividend vorkommt. Solange, bis man im Quotienten auf einen **unveränderlichen** Theil kommt, fort zu dividiren, ist meines Erachtens zu der Absicht, die man dabei hat, gar nicht nöthig, und geht öfters nicht einmal an. s. die Erl. 363.

§. 358.

wo jeder Zähler einen Grad niedriger ꝛc. ꝛc. Dieß scheint der Allgemeinheit der Auflösung nachtheilig zu sein. Die beiden Brüche zusammen

sammen addirt geben nämlich einen Bruch, dessen Zähler $n \dotplus r - 1$ Abmessungen hat, oder wo die höchste Potenz von $z \equiv n \dotplus r - 1$ ist; nun ist in der gegebenen Funktion die höchste Potenz von z die mte, und da könnte es sein, daß $n \dotplus r - 1 < m$ wäre, und also die gegebene Funktion eine Potenz von z enthielte, die in der Summe der einfachen Funktionen nicht vorkäme, welches nicht sein darf. Man muß aber bedenken, daß sich jede gebrochene rationale Funktion, von denen hier die Rede ist, in zweene Theile zerlegen läßt, wovon der eine eine ganze Funktion, der andere eine gebrochene ist, worin die veränderliche Grösse im Zähler nicht so hoch, als im Nenner, der noch der vorige ist, steigt (357.). Also kann man gewiß im Fall des gegenwärtigen §. eine gebrochene Funktion, deren Nenner $n \dotplus r$ Abmessungen hat, in zweene Theile zergliedern, deren einer eine ganze Funktion, der andere eine gebrochene ist, die übrigens noch den Nenner der gegebenen Funktion und einen Zähler von höchstens $n \dotplus r - 1$ Abmessungen hat; und diesen zweeten Theil kann man für die hier gegebene Funktion, welche z^m enthält, annehmen, wo also m höchstens $\equiv n \dotplus r - 1$ ist. Dieß zeigt zugleich die Ursache, warum die Aufg. des vor. §. vorausgeschickt worden, die sonst überflüssig scheinen mögte.

Daß übrigens im Zähler der Summe beider Brüche keine Potenz von z vorkommen kann, die höher als z^m wäre (wie man sonst vermuthen würde, wenn $m < n \dotplus r - 1$ wäre) ergeben die Worte: „da ist der Coefficient dieser Potenz in der

Summe

Summe = o„ daß sich also auch aus diesem Grunde die angenommene Bestimmung der Zähler beider Brüche nicht verwerfen läßt. Die eigentliche Ursache aber von der hier angenommenen Bestimmung der Zähler beider Brüche, daß jeder Zähler einen Grad niedriger sein soll, als sein Nenner, liegt in den gleich folgenden Worten: **weil nun die Summe n ✠ r Glieder** 2c. 2c.

§. 363.

Man setze statt der gegebenen Gleichung diese

$$\frac{M}{N} = \frac{1 \text{ ✠ } z^4}{z - z^3}$$

wovon

$$\frac{1 \text{ ✠ } z^4}{z - z^3} = \frac{1 \text{ ✠ } z^4}{(z \text{ ✠ } z^2).(1 - z)}$$

den Ausdruck

$$\frac{1 \text{ ✠ } z^4}{(z \text{ ✠ } z^2).(1 - z)}$$

mit der gegebenen Funktion (358.) verglichen, giebt $m = 4$, $n \text{ ✠ } r = 2 \text{ ✠ } 1 = 3$, also

$$m > n \text{ ✠ } r - 1$$

welches nicht sein darf. Also verfahre man nach (357.) so giebt die Division, ohne ein **unveränderliches** Glied im Quotienten zu haben (357. Erl.)

$$\begin{array}{l|l|l} -z^3 \text{ ✠ } z & z^4 \text{ ✠ } 1 & -z \text{ ✠ } \dfrac{z^2 \text{ ✠ } 1}{z - z^3} \\ \hline & \dfrac{z^4 - z^2}{z^2 \text{ ✠ } 1} & \end{array}$$

also

$$\frac{1 + z^4}{z - z^3} = -z + \frac{z^2 + 1}{z - z^3} = -z + \frac{1 + z^2}{(z + z^2).(1 - z)}$$

Hier nun die Grösse $\frac{1 + z^2}{(z + z^2).(1 - z)}$ mit der gegebenen Funktion (358.) verglichen, giebt $m = 2$, $n = 2$, $r = 1$, also $m < n + r$, wie nach (358.) erfodert wird. Setzt man nun, weil hier $n - 1 = 1$; $r - 1 = 0$,

$$\frac{1 + z^2}{(z + z^2).(1 - z)} = \frac{a + bz}{z + z^2} + \frac{l}{1 - z}$$

und bringt nun beide Brüche unter eine Benennung, so wird die Summe ihrer Zähler $=$

$$a - az + bz - bz^2 + lz + lz^2$$
$$= a + (b + l - a).z + (l - b).z^2$$

Dieses mit dem Zähler der gegebenen Funktion $1 + z^2$ verglichen, giebt

$a = 1$, $b + l - a = 0$, also $b + l = 1$;
$l - b = 1$, also $l = 1$, $b = 0$;

Folglich

$$\frac{a + bz}{z + z^2} + \frac{l}{1 - z} = \frac{1}{z + z^2} + \frac{1}{1 - z} \quad (\odot$$

und

$$\frac{1 + z^4}{z - z^3} = -z + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{z + z^2}$$

Dieß

Dieß Beispiel mag zur weitern Erörterung des Verfahrens (358.) und zum bessern Verständniß der dort gegebenen Erläuterung dienen. Es erhellet übrigens von selbsten, daß man auf solche Art allemal nur zween Theile wie in (⊙) findet; da man aber mit diesen einzeln Theilen die Zerlegung von neuem vornehmen kann, so sieht man leicht, daß sich dadurch alle einfache Theile der gegebenen Funktion ergeben. So fällt hier in die Augen, daß

$$\frac{1}{z + z^2} = \frac{1}{z.(1+z)}$$

wo $m = 0$, und $n = 1 = r$ mithin $n - 1 = 0$, also

$$\frac{1}{z.(1+z)} = \frac{a}{z} + \frac{l}{1+z} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{z.(1+z)} = \frac{a + az + lz}{z.(1+z)}$$

Demnach, wenn beide Zähler gleichgesetzt werden

$$a = 1$$

$$a + l = 0, \text{ also } l = -1$$

und daher

$$\frac{1}{z + z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}$$

folglich

$$\frac{1 + z^4}{z - z^3} = -z + \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}$$

§. 365.

und niedriger als vom Grade ist 2c. 2c.
Die Ursache dieser Einschränkung, und daß sie nicht schadet, sondern bei jeder gegebenen Funktion anwendbar ist, zeigen die Erl. 358. u. 363.

§. 366.

wenn man $\frac{p}{q}$ statt z setzt 2c. 2c. Ist nämlich n eine ganze Zahl, so muß

$$M - AS - B.(p - qz).S = n.(p - qz)$$

sein, die sich in die Gleichung

$$M - AS = 0$$

verwandelt, wenn der Faktor $p - qz = 0$ oder $z = \frac{p}{q}$ wird.

§. 367.

Wäre die gegebene Funktion diese

$$\frac{1 + 3z^4 - z^2}{(1+z)^2.(3-z)}$$

also eine höhere Potenz von z im Zähler als im Nenner, wider 365; so verfahre man erst nach 357. und dividire wirklich. Nun ist $(1+z^2) = 1+2z+z^2$, also $(1+z^2).(3-z) = 3+6z+3z^2-z-2z^2-z^3 = -z^3+z^2+5z+3$; und die wirkliche Division giebt

$-z^3$

$$-z^3+z^2+5z+3 \mid 3z^4-z^2+1 \mid -3z-3$$
$$3z^4-3z^3-15z^2-9z$$
$$3z^3+14z^2+9z+1$$
$$3z^3-3z^2-15z-9$$
$$17z^2+24z+10$$

wo man wie in 357. ein Quotient auf das beständige Glied -3 kommt; und man hat nun

$$\frac{1+3z^4-z^2}{(1+z)^2.(3-z)} = -3z-3+\frac{17z^2+24z+10}{(1+z)^2.(3-z)} (\text{X}$$

Nun setze man

$$\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz).S} = \frac{17z^2+24z+10}{(1+z)^2.(3-z)}$$

so hat man nach gehöriger Vergleichung

$$M = 17z^2+24z+10$$
$$p = 1$$
$$q = -1$$
$$S = 3-z$$

und $\frac{p}{q} = -1$

Demnach

$$A = \frac{M}{S} = \frac{17.\left(\frac{p}{q}\right)^2+24.\frac{p}{q}+10}{3-\frac{p}{q}}$$
$$= \frac{17-24+10}{3+1} = \frac{3}{4}$$

$$B = \frac{\frac{M - AS}{p - qz}}{3 - z} = \frac{17z^2 + 24z + 10 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}z}{(1 + z).(3 - z)}$$

$$= \frac{17z^2 + 24\frac{3}{4}z + \frac{31}{4}}{\frac{1 + z}{3 - z}} \quad (\odot$$

Nun erhält man durch wirkliche Diviſion

$$z + 1 \mid 17z^2 + 24\frac{3}{4}z + \frac{31}{4} \mid 17z + 7\frac{3}{4}$$

$$17z^2 + 17z$$

$$7\frac{3}{4}z + \frac{31}{4}$$

$$7\frac{3}{4}z + \frac{31}{4}$$

$$0$$

$$\text{also } B = \frac{17z + 7\frac{3}{4}}{3 - z} = \frac{-17 + 7\frac{3}{4}}{4} = \frac{-9\frac{3}{4}}{4} =$$

$$- \frac{37}{16} \quad (\mathbb{C}$$

Und ſo erhält man endlich auch den Werth von P; und das alles zuſammengenommen giebt aus (☿), wenn

(*) Man muß hier, ehe man den Werth von z' ſubſtituirt, die Diviſion wirklich vornehmen, um den Quotienten (⊙) gehörig zu erhalten; thäte man das nicht, ſondern ſubſtituirte gleich in ⊙ den Werth von z = = 1, ſo erhielte man

$$B = \frac{17 - 24\frac{3}{4} + 7\frac{3}{4}}{\frac{1 - 1}{3 + 1}}$$

$$= \mathfrak{A} = \frac{0}{4}$$

welches

wenn man statt $A : (p - qz)^2$, $B : (p - qz)$, und $\frac{P}{S}$ die gehörigen Werthe setzt, die Theile von

$$\frac{1 + 3z^4 - z^2}{(1+z)^2 \cdot (3 - z)}$$

Zu 2.

Zweites Exemp. Eigentlich giebt diese Reduktion

$$\frac{2 + t^2}{g^4 (\lambda - t)^2 \cdot (\lambda + t)^2}$$

Zu 14.

so ist der Bruch in (2.) ꝛc. ꝛc. oder eigentlich =

$$\frac{1 + \lambda^2}{4g^4 \cdot \lambda^2} \cdot \left(\frac{1}{(\lambda - t)^2} + \frac{1}{(\lambda + t)^2} \right) + \frac{1 - \lambda^2}{4g^4 \cdot \lambda^3} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\lambda - t} + \frac{1}{\lambda + t} \right) = 1 + \frac{f^2}{g^2} \left(\frac{1}{\left(\frac{f}{g} - t \right)^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\left(\frac{f}{g} + t \right)^2} \right) + \frac{1 - \frac{f^2}{g^2}}{4 \cdot g \cdot f^3} \cdot \left(\frac{1}{\frac{f}{g} - t} + \frac{1}{\frac{f}{g} + t} \right) =$$

welches der Gleichung (C) gar nicht zuwider ist, aber den Werth von B doch nicht bestimmt; $\frac{0}{0}$ kann nämlich jede Grösse bedeuten, und ist hier, wie die Gleichung (C) ergiebt, $= -9\frac{1}{4}$; s. die Note bei der Erl. Alg. 434. Man hat noch allgemeinere Mittel, den bestimmten Werth von $\frac{0}{0}$ in jedem vorkommenden Fall, leicht zu finden, wovon im folgenden Abschnitt §. 372-384. gehandelt wird.

$$= \frac{g^2 + f^2}{4f^2g^4} \times \left(\frac{g^2}{(f - gt)^2} + \frac{g^2}{(f + gt)^2} \right) +$$

$$\frac{g^2 - f^2}{4f^3g^3} \cdot \left(\frac{g}{f - gt} + \frac{g}{f + gt} \right)$$

§. 368.

$\frac{y}{p - qz}$ noch einmal durch $p - qz$ dividiren ꝛc. ꝛc. Weil nämlich L eine ganze Funktion iſt, folglich der Zähler des Bruchs, welcher L ausdruckt, durch den Nenner $(p - qz)^n$ theilbar ſein muß, ſo iſt klar, daß ſich der genannte Zähler auch durch alle niedrige Potenzen $p - qz$, $(p - qz)^2$ ---- $(p - qz)^{n-1}$ müſſe dividiren laſſen, oder

$$\frac{y}{p - qz}, \frac{y}{p - qz^2}, \frac{y}{p - qz^3} \cdots \frac{y}{(p - qz)^n}$$

ſind lauter ganze Funktionen. Dividirt man demnach y erſt durch $p - qz$; was herauskommt wieder durch $p - qz$; dieſen Quotienten aufs neue durch $p - qz$ u. ſ. w. bis man den nten Quotienten erhält, ſo ergeben ſich durch dieſe n Diviſionen lauter ganze Funktionen; und ſo wie man durch die erſte Diviſion den erſten Buchſtaben A erhält, ſo ergiebt ſich durch jede folgende Diviſion ein Buchſtab weiter, und alſo durch die n Diviſionen alle n Buchſtaben A, B ---- K.

Von

Von den Werthen solcher Funktionen, die unter gewissen Umständen unbestimmt scheinen.

§. 372.

scheint ꝛc. ꝛc. oder eigentlich: wirklich ist. Nur muß man bedenken, daß $\frac{0}{0}$ überhaupt, so wie y, ein allgemeiner unbestimmter Ausdruck ist. Wir hatten dergleichen Ausdrücke im vor. Abschn.

§. 373.

Hier $a \dotplus e$ statt x gesetzt, giebt den Zähler oder

$$P = -(a \dotplus e)^2 \dotplus a \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot (a \dotplus e)^{\frac{1}{2}};$$

nun ist

$$(a \dotplus e)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \dotplus \tfrac{1}{2} a^{-\frac{1}{2}} \cdot e \dotplus \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2} \cdot a^{-\frac{3}{2}} e^2 \ldots$$

also

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot (a \dotplus e)^{\frac{1}{2}} = a \dotplus \tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{8} a^{-1} \cdot e^2 \ldots$$

und daher

$$a \surd \left(a \, (a \dotplus e) \right) = a^2 \dotplus \tfrac{1}{2} a e - \tfrac{1}{8} e^2 \ldots$$

ausserdem ist

$$-(a \dotplus e)^2 = -a^2 - 2ae - e^2$$

also wenn man dieses zusammenrechnet,

$$P = \begin{matrix} -a^2 - 2a \cdot e - 1 \cdot e^2 \\ \dotplus a^2 \dotplus \frac{1}{2} a \cdot -\frac{1}{2} \cdot \ldots \end{matrix}$$

wo sich die Theile, die e nicht enthalten, gehörig aufheben. Die Coefficienten von e^1 sind $+\frac{1}{2} = 2 = -\frac{3}{2} = f$; die von e^2 sind $-1-\frac{1}{8} = -\frac{9}{8}$, und wenn man die zu e^3, e^4 u. s. w. gehörige Coefficienten nur mit Punkten bezeichnet, so ist $F = -\frac{9}{8}$ ---- nicht $= -\frac{7}{8}$ ----

Ebenso wird, wenn man im Nenner $a - \sqrt{ax}$ gleichfalls $x = a + e$ setzt,

$$Q = a + \frac{-a^2 - \frac{1}{2}ae + \frac{1}{8}e^2 \text{----}}{a}$$

$$= a$$

$$- a - \frac{1}{2}e + \frac{e^2}{8a} \text{----}$$

also $g = -\frac{1}{2}$, $G = \frac{1}{8a}$--- nicht $= \frac{1}{4a}$---

Demnach wird für $x = a$

$$\frac{-x^2 + a.\sqrt{ax}}{a - \sqrt{ax}} = \frac{0}{0} = \frac{f}{g} = 3a$$

Dieser Quotient gäbe sich auch wie der (⊙) (763. Erl.) Man dividire nämlich, ehe man $x = a$ setzt,

$$a - \sqrt{ax} \,|\, a\sqrt{ax} - x^2 \,|\, \sqrt{ax} + x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{a\sqrt{ax} - a}{ax - x^2}$$

$$\frac{ax - x\sqrt{ax}}{x\sqrt{ax} - x^2}$$

$$\frac{x\sqrt{ax} - x^2}{0}$$

so erhält man

$$\frac{-x^2 + a\sqrt{ax}}{a - \sqrt{ax}} = \sqrt{ax} + x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$$

was auch x bedeutet; für $x = a$ wird dieser Quotient

$$= \sqrt{aa} + a + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = a + a + a = 3a$$

wie vorhin. Und so läßt sich der endliche Quotient durch bloße Division in unzählig vielen Fällen ohne besondere Kunstgriffe sehr leicht finden, wie in den Erl. d. Alg. §. 153. wo für $a = b = \alpha = \beta$ (das. in 10.) $r = \frac{0}{0}$ und (das. 11.) gewiesen wird, daß hier $\frac{0}{0} = \sqrt{(a^2 + b^2) : 2}$

ist. Oft aber, wie selbst im Ex. 375. würde die Division schwierig werden, und da ist es besser, seine Zuflucht zur Anal. des Unendl. zu nehmen, und Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs zu differentiiren; in dem Quotient, der alsdann herauskommt, wo sich das dx im Zähler und Nenner aufhebt, $x = a$ gesetzt, giebt den gesuchten Werth von $\frac{P}{Q}$ (374.) Sollte indessen alsdann $\frac{P}{Q}$ wieder $= \frac{0}{0}$ werden, so muß man die Differentiation wiederholen, bis man auf einen Quotienten kommt, der nicht mehr $= \frac{0}{0}$ ist (378.)

§. 377.

Man setze $1 + \frac{x-1}{x+1}$ statt x (224.) so wird

$$\frac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}}$$

$$\log x = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right).\left(1 + \frac{(x-1)^2}{3.(x+1)^2} + \frac{(x-1)^4}{5(x+1)^4} \cdots\right)$$

Nun ist $x - 1 = -\sqrt{(1-x)}.\sqrt{(1-x)}$

also

$$\frac{l\,x}{\sqrt{(1-x)}} = -\frac{2.\sqrt{(1-x)}}{x+1}.\left(1 + \frac{(x-1)^2}{3.(x+1)^2} \cdots\right)$$

und für $x = 1$,

$$= -\frac{2}{1+1}.0.(1+0+0\cdots) = 0$$

völlig wie man es durch die Differentiation (374.) erhält.

dem Scheine nach ꝛc. ꝛc. s. die Erl. 372. zu diesem Wort.

§. 378.

zu geben scheint ꝛc. ꝛc. s. die Erl. 372. zu dies. Wort.

§. 381.

Aus Erl. 377. wird

$$\frac{x^n}{lx} = \frac{\left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right)^n}{1 - \frac{x-1}{x+1}}$$

$$2\left(\frac{x-1}{x+1}\right).\left(1 + \frac{(x-1)^2}{3.(x+1)^2} + \frac{(x-1)^4}{5.(x+1)^4} \cdots\right)$$

Nun

Nun ist für $x = \infty$, $x - 1 = x + 1$, also für den Fall

$$\frac{x^n}{lx} = \frac{\left(\frac{1+1}{1-1}\right)^n}{2.(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}----)} = \frac{\infty^n}{2.(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}---)}$$

$= \infty$ nämlich ein Unendliches von der nten Ordnung, daher auch

$$\frac{x}{lx} = \infty$$

Deßwegen kann doch selbst $lx = \infty$ sein (244) nur müssen sich x und lx wie Unendliche von verschiedenen Ordnungen verhalten, also wie das Unendliche der ersten Ordnung zum Endlichen, so daß ihr Quotient allemal $= \infty$ wird, welches der im Buche auf eine andere Art erwiesene Satz ist.

§. 382.

P. Q folgendergestalt ꝛc. ꝛc. Zuweilen weiß man auch schon aus andern Gründen den Werth von P. Q, der in solchem Fall herauskommen muß, und da hat man dergleichen Kunstgriffe nicht nöthig, wie oben in (12. am E.) wo für $\lambda = 90°$, $\text{Cos}\,\lambda = 0$ und $\text{tang}\,\lambda = \infty$, und für diesen Werth von λ

$$\text{Cos}\,\lambda . \text{tang}\,\lambda = 1$$

wird, weil man weiß, daß $\text{Cos}\,\lambda . \text{tang}\,\lambda = \sin\lambda$, aber $\sin 90° = 1$ ist. Im Ex. im Buche ist

$1 - x = P$, $\text{tang}\frac{\pi x}{2} = Q$; und weil $\text{tang}\frac{\pi x}{2} =$

$= \frac{1}{\text{Cot}\frac{\pi x}{2}}$, so hat man $\text{Cot}\frac{\pi x}{2} = R$, also der

gesuchte Werth $= \frac{dP}{dR} = \frac{d(1-x)}{d\,\text{Cot}\frac{\pi x}{2}}$

Nun ist (oben Erl. §. 30.)

$$d\,\text{Cot}\frac{\pi x}{2} = \frac{-\,d\frac{\pi x}{2}}{\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi}{2}.dx}{\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$

also

$$\frac{d(1-x)}{d\,\text{Cot}\frac{\pi x}{2}} = \frac{-\,dx}{-\frac{\pi}{2}.dx:\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2}{\pi}$$

also

also für $x = 1$,

$$P.Q = \frac{2\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}$$

Nun wird hier der Halbmesser $= 1$ gesetzt, also ist in der Verhältnis $1 : \pi$, π der halbe Umkreis, und $\frac{\pi}{2} = 90°$, demnach $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$, und

$$P.Q = \frac{2}{\pi}$$

wie im Buche.

§. 383.

Man kann sich hier häufig wieder blos der gemeinen Division bedienen. Das erste Exempel ließe sich hier so behandlen:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots\ldots \text{ (Alg. 7.)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 \ldots\ldots$$

also

$$\frac{2}{1-x^2} = 2 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 \ldots\ldots$$

und

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = 1 - 2 + x + (x^2 - 2x^2)$$
$$+ x^3 + (x^4 - 2x^4) + x^5 + (x^6 - 2x^6) \ldots$$
$$=$$

$$= -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 \ldots$$
$$= -(1 - x + x^2 - x^3 \ldots\ldots)$$
$$= -\frac{1}{1+x} \text{ (Alg. 13.)}$$

Folglich wird für $x = 1$

$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$ wie im Buche.

Integrirung der rationalen Differentiale.

§. 385.

Es iſt hier im Ex.

$$-\tfrac{1}{4}l(1+x) - \tfrac{7}{4}l(1-x) = l(1+x)^{-\frac{1}{4}} + l(1-x)^{-7\cdot\frac{1}{4}}$$
$$= l\left((1+x)^{-\frac{1}{4}}.(1-x)^{-7\cdot\frac{1}{4}}\right)$$
$$= l\left((1+x).(1-x)^7\right)^{-\frac{1}{4}}$$
$$= l\frac{1}{\sqrt[4]{\left((1+x).(1-x)^7\right)}}$$

also

$$-\tfrac{1}{4}l(1+x) - \tfrac{7}{4}l(1-x) + 2lx = l\frac{x^2}{\sqrt[4]{\left((1+x).(1-x)^7\right)}}$$

§. 386.

§. 386.

ist des zugehörigen Bruchs Zähler ꝛc. ꝛc. M ist nämlich des gegebenen Bruchs Zähler, und S das Produkt aller übrigen Faktoren von N, die auser dem $p - qx$ noch vorhanden sind.

Im Ex. 385. ꝛc. ꝛc. Man darf nämlich nur $x = \frac{P}{q}$ und aus (371.) $M = 1$, $p = 1$ und $q = -1$ setzen.

§. 387.

muß n mal $= 0$ werden ꝛc. ꝛc. Es hat nämlich der Ausdruck

$$\frac{M}{Z} - A - B.(p - qx) - - -$$

$p - qx$ zum Faktor; er durch $p - qx$ dividirt wieder $p - qx$ zum Faktor; dieser Quotient aufs neue durch $p - qx$ dividirt hat wieder $p - qx$ unter seinen Faktoren u. s. w. bis auf den nten Quotienten, welcher der letzte ist, der $p - qx$ zum Faktoren hat (s. Erl. 368.). Also ist $\frac{M}{Z} - A - B.(p - qx) - - -$ ein Product, das n Faktoren hat, deren jeder $= p - qx$; und wenn man also $p - qx = 0$ setzt, so wird das ganze Produkt $= 0$; oder wenn man $\frac{M}{Z} - A - B.(p - qx) - - -$ $= 0$ setzt, so ist dieß eine Gleichung, die n solche

Wurzel-

Wurzelgleichungen hat, deren jede $= p - qx$;
aber $p - qx = o$ giebt $x = \frac{p}{q}$, alſo hat die genannte Gleichung n ſolche Wurzeln, deren jede $\frac{P}{q}$.

ſo geben ſich die Coefficienten - - - - folgendergeſtalt ꝛc. ꝛc. In dem allgemeinen Ausdruck für die fte Differentialgleichung S. 321. bedeuten nämlich f, F einander zugehörige Exponenten und Coefficienten von $p - qx$ in dem Ausdruck $\frac{M}{Z} - A - B . (p - qx)$ - - - - So gehört zur oten Potenz von $p - qx$ der Coefficient A, zur erſten der B u. ſ. w. und es iſt alſo

für $F = A; B; C; D; E;$ - - - -

$f = o; 1; 2; 3; 4;$ - - - - —

Nun iſt für die fte Differentialgleichung überhaupt

$$d^f \frac{M}{Z} \mp \left(f.(f-1)\text{----}2.1.F \mp f.(f-1)\text{---}\right.$$
$$\left.\text{---}2.\varphi.(p-qx)\text{---}\right)(q\,dx)^f$$

wo von dem Faktor, der in $(q\,dx)^f$ multiplicirt iſt, das zweite und jedes folgende Glied die Gröſſe $p - qx$ zum Faktor hat. Setzt man alſo $\frac{P}{q} = x$ oder $p - qx = o$ in die Differentialgleichungen, ſo wird jede fte Differentialgleichung überhaupt

$$d^f \frac{M}{Z} \mp f.(f-1)\cdots 2.1.F.(q\,dx)^f = 0 \quad (\odot$$

Das übrige zur Linken verschwindet. In dieser Gleichung nun statt F nach und nach B, C, D ... und statt des zugehörigen f; 1, 2, 3 ... gesetzt, giebt die Coefficienten wie im Buche. Nämlich

1.) Für $F = B$ also $f = 1$ ist, die Zeichen gehörig beobachtet

$$d^1 \frac{M}{Z} \mp 1.B.(q\,dx)^1 = 0$$

also

$$B = -\frac{1}{q\,dx} \cdot d\frac{M}{Z}$$

2.) Für $F = C$ und $f = 2$,

$$d^2 \frac{M}{Z} - 2.1.C.q^2.(dx)^2 = 0$$

also

$$C = \frac{1}{2\,(q\,dx)^2} \cdot d^2 \frac{M}{Z}$$

3.) Für $F = D$ und $f = 3$,

$$d^3 \frac{M}{Z} \mp 3.2.1.D.(q\,dx)^3 = 0$$

also

$$D = -\frac{1}{6.(q\,dx)^3} \cdot d^3 \frac{M}{Z}$$

4.) Für $F = E$ und $f = 4$,

$$d^4 \frac{M}{Z} + 4.3.2.1.E.(q\,dx)^4 = 0$$

also

$$E = \frac{1}{24.(q\,dx)^4} \cdot d^4 \frac{M}{Z}$$

u. s. w.

Der erste Coefficient A giebt sich aus der Hauptgleichung, darinn $p - qx = 0$ gesetzt.

Im Ex. 371. ꝛc. ꝛc. nämlich 371. II.

Erfindung der dreitheilichten Faktoren.

§. 389.

weil nun ... so ist qz ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich $\text{Cof}\,\varphi^2 - 1 = -\sin\varphi^2 = \sin\varphi^2.(-1)$

also

$$Q^2 - p^2q^2 = p^2q^2.(\text{Cof}\,\varphi^2 - 1) = p^2q^2.\sin\varphi^2.(-1)$$

und

$$\sqrt{(Q^2 - p^2q^2)} = pq\sqrt{-1}.\sin\varphi$$

Demnach

$$z = \frac{Q \mp \sqrt{(Q^2 - p^2q^2)}}{q^2} = \frac{Q \mp pq\sqrt{-1}.\sin\varphi}{q^2}$$

$$= \frac{pq.\text{Cof}\,\varphi \mp pq.\sin\varphi.\sqrt{-1}}{q^2}$$

=

$$= \frac{p.(\mathrm{Cof}\,\varphi \mp \sin\varphi.\sqrt{-1})}{q}$$

und

$$q^2 = p.(\mathrm{Cof}\,\varphi \mp \sin\varphi.\sqrt{-1})$$

Uebrigens sind hier $\mathrm{Cof}\,\varphi$, $\sin\varphi$ nur allgemeine Ausdrücke, die überhaupt Grössen bedeuten, welche < 1 sind, doch so, daß $\sin\varphi$ trigonometrisch von $\mathrm{Cof}\,\varphi$ abhängt, und φ in gegebenen Fällen gehörig bestimmt wird.

§. 392.

Die Funktion $a^n \mp z^n$ mit der

$$\alpha \mp \beta z \mp \gamma z^2 \cdots \mp \mu z^\nu$$

verglichen, giebt $\alpha = a^n$, $\beta = \gamma = \delta \cdots = o$, $\mu = 1$ und $\nu = n$. Nun sind die beiden Reihen in IIII. diese

1.) $o = \alpha \mp \beta r.\mathrm{Cof}\,\varphi \cdots \mp \mu r^\nu.\mathrm{Cof}\,\nu.\varphi$

2.) $o = \beta r.\sin\varphi \cdots \mp \mu r^\nu.\sin\nu.\varphi$

also weil in der gegebenen Funktion alle Coefficienten zwischen α und μ verschwinden, hier

1.) $o = \alpha \mp \mu r^\nu.\mathrm{Cof}\,\nu.\varphi$

2.) $o = \mu r^\nu.\sin\nu.\varphi$

oder, wenn man $\alpha = a^n$, $\mu = 1$ und $\nu = n$ setzt

1.) $o = a^n \mp r^n.\mathrm{Cof}\,n.\varphi$

2.) $o = r^n.\sin n.\varphi$

Daraus findet sich $r = a$; aber $r = \frac{P}{q}$, also

$$\frac{P}{q} = a \text{ oder für } q = 1,$$

$$P = a$$

und wie im Buche gewiesen wird,

$$n\varphi = (2x \pm 1) . \pi$$

also $$\varphi = \frac{2x \pm 1}{n} . \pi$$

Weil nun (389) $Q = pq . \mathrm{Cof}\, \varphi$, so hat man hier

$$Q = a . 1 . \mathrm{Cof} \frac{2x \pm 1}{n} . \pi$$

und man darf nur in dem dortigen Produkt $p^2 - 2Qz \pm q^2 z^2$ die gefundenen Werthe von p, q und Q substituiren, um den hier gesuchten dreitheilichten Faktor zu erhalten.

Zu I.

Diese sei $= rn \pm 2g \pm 1$ wo r gerade 2c.

2c. Ist nämlich $2x \pm 1 > n$ d. h. $\frac{2x \pm 1}{n}$ ein uneigentlicher Bruch oder $\varphi > \pi$, so kann $2x \pm 1$ ein Ausdruck sein, der die Zahl n um eine Grösse übertrift, die selbst noch ein Vielfaches von n enthält, das sich durch rn ausdrucken läßt. Aber rn muß, weil n gerade angenommen wird, selbst gerade sein, und folglich die genannte Grösse $(2x \pm 1) - n$,

— n, die ungerade sein muß, auſſer diesem r n noch einen ungeraden Theil, der sich allgemein durch 2 g ✠ 1 andeuten läßt, enthalten. Das ist die Ursache, warum die ungerade Zahl, um die 2 x ✠ 1 > n ist, oder (2 x ✠ 1) — n im Buche = r n ✠ 2 g ✠ 1 gesetzt wird. Und da ist begreiflich, daß 2 g ✠ 1 < n sein muß, weil alles, was von ganzen n in dem Ausdruck (2 x ✠ 1) — n enthalten ist, schon durch das Vielfache r n ausgedruckt wird. Die Gleichung

$$(2x \pm 1) \mp n = rn \pm 2g \pm 1$$

giebt nun auch

$$2x \pm 1 = (r \pm 1).n \pm 2g \pm 1$$

Zu II.

die zusammen n — 1 zweitheilichte unmögliche ꝛc. ꝛc. Jeder dieser dreitheilichten Faktoren ist nämlich selbst ein Produkt aus zweenen zweitheilichten Faktoren, deren zweeter Theil was unmögliches enthält (389.). So ist

$$z^2 - 2az.\operatorname{Cof}\frac{2g \pm 1}{n}.\pi \pm z^2 = \left[z - a \times \left(\operatorname{Cof}\frac{2g \pm 1}{n}.\pi - \operatorname{sin}\frac{2g \pm 1}{n}.\pi.\sqrt{-1}\right)\right] \times \left[z - a.\left(\operatorname{Cof}\frac{2g \pm 1}{n}.\pi \pm \operatorname{sin}\frac{2g \pm 1}{n}.\pi.\sqrt{-1}\right)\right]$$

weil es nicht $\equiv 0$ ſein kann ꝛc. ꝛc. nämlich für die Erfindung eines dreitheilichten Faktors; denn für $g \equiv 0$ wird $\frac{2x \dotplus 1}{n} . \pi$ oder $\varphi \equiv (2x \dotplus 1) . \pi$, und das giebt keinen dreitheilichten Faktor mehr, ſondern den zweitheilichten $a \dotplus z$ (391. VII.). Die $\frac{n-1}{2}$ dreitheilichte Faktoren enthalten wieder $2 . \frac{n-1}{2} \equiv n - 1$ zweitheilichte, die mit dem $a \dotplus z$ zuſammen die n zweitheilichte Faktoren ausmachen, wie vorhin. Jeder dieſer Faktoren enthält z, und das Produkt aus ihnen allen enthält alſo die Potenz n von z, wie ſie ſich in der gegebenen Funktion $a^n \dotplus z^n$ findet. Das ſtimmt mit 391. VI. u. VII. überein; nähme man nämlich ſtatt des letzten zweitheilichten Faktors $a \dotplus z$ auch den dreitheilichten $(a \dotplus z)^2 \equiv a^2 \dotplus 2az \dotplus z^2$, ſo hätte man mit den übrigen $\frac{n-1}{2}$ zuſammen $\frac{n-1}{2} \dotplus 1 \equiv \frac{n \dotplus 1}{2}$ dreitheilichte Faktoren, deren jeder z^2 enthält; und das Produkt aus ihnen enthielte alſo $(z^2)^{\frac{n+1}{2}} \equiv z^{n+1}$ alſo eine höhere Potenz von n, als die gegebene Funktion $a^n \dotplus z^n$, zum Beweiß, daß ein zweitheilichter Faktor, der die erſte Potenz von z enthält, nämlich $a \dotplus z$, iſt zuviel genommen worden.

§. 393 - 395.

Der zweite Faktor bei 393. III. ist eigentlich $a^2 \dotplus z^2$, weil Cos $\frac{3}{6}\pi = \text{Cos } 90^\circ = 0$ ist. Uebrigens könnte man auch hier die Faktoren von $a^n \dotplus z^n$ durch geometrische Verzeichnung finden. (fig. 3.)

Macht man nämlich einen Winkel c b d, dessen Cosinus in der Formel für den Faktor vorkommt, und nimmt nun b c = a, b d = z, so ist c d die Quadratwurzel aus dem gesuchten Faktor, oder $c d^q$ = dem gesuchten Faktor. Macht man z. B. in 393. III. den Winkel $c b d = \frac{1}{6}\pi = 30^\circ$, und b c = a, b d = z, so ist für g = 0 der gesuchte Faktor von $a^6 \dotplus z^6$, $= c d^q$ weil die Trig. lehrt, daß

$$c d^q = b c^q \dotplus b d^q - 2 b c . b d . \text{Cos } c b d.$$

Indessen dient diese Bemerkung zu keinen allgemeinen Anwendungen auf Integrationen, weil sie keine allgemeine Formeln für die Faktoren, sondern solche nur bei vorkommenden einzeln Fällen in Zahlen giebt, und doch nur so genau, als es der Gebrauch des Reißzeugs verstattet. (*)

(*) Man hat auch ein Verfahren, die Faktoren von $a^n \dotplus z^n$ durch geometrische Verzeichnung zu finden, ohne daß man nöthig hätte, dabei an die allgemeine Formeln zu denken; man findet es in Hrn. Klügels analytischer Trigonometrie S. 102 u. folg. Es ist aber wie das obige hier von keinem Nutzen.

Anwendung dieser Lehren auf die Integrationen.

§. 397.

Zu I.

Es sei ein solcher 2c. 2c. Nach 390. lassen sich nämlich alle dreitheilichte Faktoren der Funktion $\frac{M\,dx}{N}$ angeben; die allgemeine Form für jeden von ihnen ist aber die $p^2 - 2pqx . \mathrm{Cof}\,\varphi + q^2x^2$, also darf man nur einen allgemeinen Ausdruck für das Integral des nur genannten dreitheilichten Faktoren suchen, um zugleich einen allgemeinen Ausdruck für die Integralen aller übrigen dreitheilichten Faktoren zu haben, die alsdann alle zusammen addirt werden müssen, um das Integral der Funktion $\frac{M\,dx}{N}$ zu erhalten. Die Beispiele (398.) werden das ganze Verfahren besser erläutern.

Zu II.

Aus 286. ist der zu dem einfachen Faktor $p - qx$ gehörige Zähler $= \frac{M}{S} = \frac{M}{dN : (-q\,dx)}$ (S. 318. am E.) so daß $\frac{p}{q}$ statt x also $p - qx = o$ oder $qx - p = o$ gesetzt wird. Hier nun ist der zu A gehörige einfache Faktor

$qx -$

$$qx - p.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$

oder der zu — A gehörige

$$p.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi) - qx$$

also muß dieser $= o$ gesetzt oder

$$x = \frac{P}{q}.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$

gesetzt, hier für $\frac{M}{dN:(-qdx)}$ oder $\frac{-M.q}{dN:dx}$ die Grösse — A geben, also wenn man $\frac{dN}{dx} = L$ und $\frac{P}{q} = r$ setzt; so giebt

$$-\frac{M.q}{L}$$

die Grösse — A, wenn man darinnen $r.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi)$ statt x setzt, oder wenn man wie 392. $q = 1$ setzt, so giebt $r.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi)$ statt x gebraucht, $\frac{\mp M}{L}$ die Grösse $\mp$ A. Und ebenso erhält man die Grösse B.

Zu IIII.

Die beiden Nenner in I. mit einander multiplicirt, giebt

$$q^2x^2 - qx.p.(\text{Cof}\,\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$
$$- qx.p.(\text{Cof}\,\varphi \mp \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$

$$\pm p^2.(\mathrm{Cof}\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin\varphi).(\mathrm{Cof}\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi)$$
$$= q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2.\left(\mathrm{Cof}\varphi^2 - \sin\varphi^2.(\sqrt{-1})^2\right)$$
$$= q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2(\mathrm{Cof}\varphi^2 \pm \sin\varphi^2)$$

aber $\mathrm{Cof}\varphi^2 \pm \sin\varphi^2 = 1$, also das genannte Produkt $=$

$$q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2$$

Ferner ist

$$A.(qx - p.(\mathrm{Cof}\varphi - \sqrt{-1}.\sin\varphi))$$
$$\pm B.(qx - p.(\mathrm{Cof}\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin\varphi))$$
$$= \left.\begin{matrix} A \\ \pm B \end{matrix}\right\}(qx - p.\mathrm{Cof}\varphi) \pm \left.\begin{matrix} A \\ -B \end{matrix}\right\}p.\sin\varphi.\sqrt{-1}$$

Daher geben die beiden Brüche (I.) unter eine Benennung gebracht und addirt den Bruch in IIII.

Zu V.

des Zählers ꝛc. ꝛc. oder eigentlich: des ganzen Bruchs, weil der Nenner mit gerechnet wird. Der erste Theil des Bruchs ist nämlich

$$\int \frac{(A \pm B).(qx - p.\mathrm{Cof}\varphi).dx}{q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2}$$
$$= \int \frac{(A \pm B).(qx\,dx - p.\mathrm{Cof}\varphi.dx)}{q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2}$$

Die Coefficienten im Zähler auf die im Nenner zu bringen, um sich dadurch die Integration zu erleichtern, multiplicire man mit 29; das giebt

$\int(A \pm$

$$\int \frac{\left(\frac{A \pm B}{2q}\right).(2q^2 x\,dx - 2pq.\mathrm{Cof}\varphi.dx)}{q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2}$$

der noch dem vorigen Bruch gleich ist; aber die Integrationsregeln lassen sich nun leichter anwenden. Des Zählers Integral ist nämlich =

$$\frac{A \pm B}{2q}.(q^2x^2 - 2pq.\mathrm{Cof}\varphi.x \pm \mathrm{Conft})$$

und der Nenner gleichfalls =

$$q^2x^2 - 2pq.\mathrm{Cof}\varphi.x \pm \mathrm{Conft}$$

also sieht man, daß

$$\frac{2qx^2\,dx - 2pq.\mathrm{Cof}\varphi.dx}{q^2x^2 - 2pq.\mathrm{Cof}\varphi.x \pm p^2}$$

ein Bruch ist, dessen Zähler das Differential des Nenners ist, also ein Bruch von der Form $\frac{dz}{z}$, wenn $q^2x^2 - 2pqx.\mathrm{Cof}\varphi \pm p^2 = z$ gesetzt wird. Folglich ist der erste Theil des Bruchs u. IIII. =

$$\int \frac{\left(\frac{A \pm B}{2q}\right).dz}{z}$$

$$= \frac{A \pm B}{2q} \int (dlz) \quad (218.)$$

$$= \frac{A \pm B}{2q}.lz \pm \mathrm{Conft}$$

Soll

Soll hier das Integral für $x = 0$ verschwinden, so wird $\frac{A + B}{2q} . l(q^2x^2 - 2pq . Cos\varphi . x + p^2)$

$+ Const = \frac{A + B}{2q} . lp^2 + Const = 0$, also

$Const = - \frac{A + B}{2q} . lp^2$

$= - \frac{A + B}{q} . lp$

und daher das vollständige Integral dieses ersten Theils $=$

$$\frac{A + B}{2q} . lz - \frac{A + B}{q} . lp$$

Eben die Voraussetzung für die Erfindung der Constante beim zweiten Theil beibehalten, giebt für den ganzen Bruch (IIII.) ein Integral, das für $x = 0$ verschwindet.

Zu VI.

Es ist $\frac{dx}{q^2x^2 - 2pqx . Cos\varphi + p^2} =$

$$\frac{dx}{q^2x^2 - 2pqx . Cos\varphi + p^2 . Cos\varphi^2 + p^2 . sin\varphi^2}$$

$$= \frac{dx}{(qx - p . Cos\varphi)^2 + p^2 . sin\varphi^2}$$

oder,

oder, wenn man der Kürze wegen $qx - p.\mathrm{Cos}\varphi = u$ setzt, welches zugleich $dx = \frac{du}{q}$ giebt, so wird der vorige Bruch

$$= \frac{du : q}{u^2 + p^2.\sin\varphi^2} \quad (\odot$$

Diesem Bruch nun eine Form zu geben, unter der er sich leicht integriren läßt, sucht man ihn auf die Gestalt $\frac{dt}{t^2 + 1} = d\,\mathrm{Arc\,tang}\,t$ (299.) zu bringen, weil sich solches hier leicht thun läßt. Man darf nämlich nur Zähler und Nenner in $(\odot)$ durch $p^2.\sin\varphi^2$ dividiren, das giebt

$$= \frac{\frac{du}{q.p.\sin\varphi.p.\sin\varphi}}{\frac{u^2}{p^2.\sin\varphi^2} + 1}$$

$$= \frac{1}{qp.\sin\varphi} \cdot \frac{\frac{du}{p.\sin\varphi}}{\frac{u^2}{p^2.\sin\varphi^2} + 1}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{p.q.\sin\varphi} \cdot \frac{d\left(\frac{u}{p.\sin\varphi}\right)}{\left(\frac{u}{p.\sin\varphi}\right)^2 + 1}$$

wo der Differentialbruch völlig die Gestalt $\frac{dt}{1 + t^2}$

hat, nur $\frac{u}{p \cdot \sin \varphi}$ statt t gesetzt; das giebt also

$$\frac{dx}{q^2 x^2 - 2pqx \cdot \cos \varphi + p^2} = \frac{1}{qp \cdot \sin \varphi}.$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{p \cdot \sin \varphi}\right)}{\left(\frac{u}{p \cdot \sin \varphi}\right)^2 + 1} = \frac{1}{qp \cdot \sin \varphi} \cdot d \operatorname{Arc\,tang} \frac{u}{p \cdot \sin \varphi}$$

welches das Integral im Buche giebt, nämlich

$$(A - B) \cdot p \cdot \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{1}{q \cdot p \cdot \sin \varphi}.$$

$$\operatorname{Arc\,tang} \frac{qx - p \cdot \cos \varphi}{p \cdot \sin \varphi} + \text{Const} = \frac{(A - B) \cdot \sqrt{-1}}{q}.$$

$$\operatorname{Arc\,tang} \frac{qx - p \cdot \cos \varphi}{p \cdot \sin \varphi} + \text{Const.}$$

Die Constante ergiebt sich aus VII.

Zu VII.

statt des Coefficienten ꝛc. ꝛc. nämlich $\frac{(A - B) \cdot \sqrt{-1}}{q}$ ist nach Trig. 19. S. - - - -

oder ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich $\frac{qx - p \cdot \cos \varphi}{p \sin \varphi} +$

$\cos \varphi$

$$\frac{\text{Cof}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{qx.\sin\varphi - p.\text{Cof}\varphi.\sin\varphi + p.\text{Cof}\varphi.\sin\varphi}{p.\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{qx.\sin\varphi}{p.\sin\varphi^2}$$

und $\frac{p.\text{Cof}\varphi - qx}{p.\sin\varphi} \cdot \frac{\text{Cof}\varphi}{\sin\varphi} + 1 =$

$$\frac{p.\text{Cof}\varphi^2 - qx.\text{Cof}\varphi + p.\sin\varphi^2}{p.\sin\varphi^2}$$

aber

$p.\text{Cof}\varphi^2 + p.\sin\varphi^2 = p.(\text{Cof}\varphi^2 + \sin\varphi^2) = p$

also der ganze Bruch für die Tangente des Unterschieds, deren zugehöriger Bogen also die Differenz der in Q multiplicirten Bögen ist,

$$= \frac{\frac{qx.\sin\varphi}{p.\sin\varphi^2}}{\frac{p - qx.\text{Cof}\varphi}{p.\sin\varphi^2}} = \frac{qx.\sin\varphi}{p - qx.\text{Cof}\varphi}$$

Zu VIII.

Diese Grösse muß also noch ꝛc. ꝛc. Dieß ist nämlich die Grösse $\frac{A+B}{q}$. lp nur daß andere Grössen darin substituirt sind s. die Erl. zu V. am E.

Zu VIIII.

Dieß ist so zu verstehen: um alle M die in M enthalten sind, zu erhalten, muß man im Werthe

von

von M ſtatt jedes Glieds, das ſich ſo ausdrucken läßt $x^\varkappa$, den Werth $r^\varkappa . \mathrm{Cof}\varkappa . \Phi$; und um alle in M enthaltene m zu finden, wieder im Werthe von M ſtatt jedes Glieds, das die Form $x^\varkappa$ hat, den Werth $r^\varkappa . \sin\varkappa . \Phi$ ſetzen. Und ſo erhält man alle L und I, wenn man im Werthe von L ſtatt jedes Glieds, das die Form $x^\varkappa$ hat (wo $\varkappa$ wieder andere Werthe haben kann, als in den Gliedern von M), $r^\varkappa . \mathrm{Cof}\varkappa . \Phi$ und $r^\varkappa . \sin\varkappa . \Phi$ ſchreibt.

§. 398. Zu I.

Die Gröſſe $\alpha \dotplus x^n$ mit der $a^n \dotplus z^n$ (392.) verglichen, giebt $z = x$, $a^n = \alpha$, alſo $a = \sqrt[n]{\alpha}$; und das verwandelt den dortigen allgemeinen Ausdruck für jeden dreitheilichten Faktor in den hier im Buche. Nun ſind ferner p, r, q und Φ beſtimmt. Die Werthe von M und L erhält man aus (397 VIIII. oder III.); weil nämlich hier $M = x^m$ iſt, ſo giebt es hier nur ein Glied von M, das nämlich in 397. III. $\eta = 1$ und $\varkappa = m$ hat; um alſo $\mathfrak{M}$ zu erhalten, darf man nur in dem Ausdruck $r^\varkappa . \mathrm{Cof}\varkappa . \Phi$ (397. VIIII.) $\varkappa = m$ ſetzen, das giebt

$$\mathfrak{M} = r^m . \mathrm{Cof}\, m . \Phi$$

wo man die im Buche angegebenen Werthe von r und Φ ſubſtituiren muß. Der Ausdruck für m iſt der nämliche, nur ſin ſtatt Cof gebraucht, alſo

$$\mathfrak{m} = r^m . \sin m . \Phi$$

Ferner

Ferner ist hier $L = n x^{n-1}$ und hat also gleichfalls nur ein Glied, das mit dem unbestimmten Glied $\eta x^{\varkappa}$ (III.) verglichen, $\eta = n$ und $\varkappa = n - 1$ giebt; um also $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{l}$, zu erhalten, setzt man statt der Ausdrücke $r^{\varkappa}. \operatorname{Cos} \varkappa. \varphi$ und $r^{\varkappa}. \sin \varkappa. \varphi$ die ähnlichen $r^{n-1}. \operatorname{Cos}(n-1). \varphi$ und $r^{n-1}. \sin (n-1). \varphi$, und substituirt solche im Werthe von L statt x^{n-1} (VIIII.). Die beiden Ausdrücke $r^{n-1}. \operatorname{Cos}(n-1). \varphi$ und $r^{n-1}. \sin(n-1). \varphi$ geben nämlich hier mit $\eta = n$ multiplicirt, der erste den Werth von $\mathfrak{L}$, der andere den von $\mathfrak{l}$. So werden sich nun auch die Sätze hier II. u. III. leicht verstehen lassen.

Ist n ungerade so giebt ꝛc. ꝛc. Da wird nämlich der Faktor $= a + z$ (392. II.) also hier $= \sqrt[n]{\alpha} + x$, der in dem Integrale statt des dreitheilichten $\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x. \operatorname{Cos} \frac{2\varkappa + 1}{n} . \pi . \sqrt[n]{\alpha} + x^2$ gesetzt werden muß. Ausserdem wird wegen $2\varkappa + 1 = n$ der Quotient $\frac{2\varkappa + 1}{n} = 1$, also für diesen Fall

$$\sin(n-m-1). \frac{2\varkappa+1}{n} . \pi = \sin(n-m-1). \pi (\odot$$

welches, wenn m und n ganze Zahlen sind, der Sinus eines Vielfachen von π, mit $\sin = 0$ ist. Daher muß das ganze zweite Glied des Integrals, das diesen Sinus als einen Faktor enthält, verschwin-

den. Es wird alſo, wenn n ungerade iſt, das Integral für $2\varkappa \mp 1 = n$,

$$\frac{\text{Cof}\frac{n-m-1}{n}.(2\varkappa \mp 1).\pi}{n\alpha^{(n-m-1):n}}.l(\sqrt[n]{.\alpha} \mp x)$$

oder wegen (⊙)

$$= \frac{\left(\text{Cof}\,(n-m-1).\pi\right).l(\sqrt[n]{\alpha} \mp x)}{n\alpha^{(n-m-1):n}}$$

Nun iſt $\text{Cof}\,(n-m-1).\pi = \mp 1$ (wo ich das obere Zeichen zuerſt genannt haben will) nachdem $n-m-1$ gerade oder ungerade iſt, d. i. weil hier n ungerade alſo $n-1$ gerade angenommen wird, ſo iſt das genañte Integral $= \frac{\mp l(\sqrt[n]{\alpha} \mp x)}{n\alpha^{(n-m-1):n}}$ nachdem m gerade oder ungerade iſt.

Ueberhaupt ſieht man, daß ſich die allgemeine Formel $\frac{x^m\,dx}{\alpha \mp x^n}$ (I.), deren verſchiedene Vorſtellungen in II. III. u. IIII. nur von den verſchiedenen Abänderungen der Zeichen herrühren, auf den Ausdruck (248.) $x^m.(a \mp bx^n)^p.dx$ bringen läßt, nur in (I.) $a = \alpha$, $b = 1$ und $p = -1$ geſetzt. Daraus erhellet, daß die Formel 248 für $p = -1$ und überhaupt für ein ſolches p, das eine verneinte ganze Zahl iſt, allemal wenigſtens ein tranſcendentiſches Integral hat (VI.), das ſich auf die gewie-

gewiesene Art durch eine endliche Reihe angeben läßt. Denn daß die Integration hier I. überhaupt das Integral von $x^m (a \pm b x^n)^p dx$ für jedes verneintes ganzes p giebt, erhellt so: Es ist

$$\frac{x^m}{(a \pm b x^n)^{-p}} \text{ (wo } -p \text{ bejaht ist)} = \frac{x^m}{b^{-p}\left(\frac{a}{b} \pm x^n\right)^{-p}}$$

also $$\int \frac{x^m dx}{(a \pm b x^n)^{-p}} = \frac{1}{b^{-p}} \cdot \int \frac{x^m dx}{\left(\frac{a}{b} \pm x^n\right)^{-p}}$$

oder, wenn man $\frac{a}{b} = \alpha$ setzt,

$$= \frac{1}{b^{-p}} \cdot \int \frac{x^m dx}{(\alpha \pm x^n)^{-p}}$$

wo der Nenner $(\alpha \pm x^n)^1$ das im Buche angegebene Integral giebt; da nun der Nenner $(\alpha \pm x^n)^{-p}$ eben die Faktoren, nur jeden $-p$ mal enthält, so muß der ganze Bruch $\frac{x^m dx}{(\alpha \pm x^n)^{-p}}$ auch ebendas Integral nur $-p$ mal geben, und es ist also (⊙

$$\int \frac{x^m dx}{(a \pm b x^n)^{-p}} = \frac{P}{b^{-p}} \cdot \int \frac{x^m dx}{\alpha \pm x^n} \quad (*)$$

(*) Ich muß aber erinnern, daß die Grösse L dennoch in dieser Integralgleichung nach dem ganzen Nenner (α ±

Zu II.

Die Division giebt

$$y^n \dotplus \frac{1}{\alpha} \Big| y^{m+n-2} \Big| y^{m-2}$$

$$\frac{y^{m+n-2} \dotplus \frac{y^{m-2}}{\alpha}}{-y^{m-2}}$$

$$\frac{}{\frac{1}{\alpha}}$$

also

$$\frac{y^{m-n+2}\,dy}{\frac{1}{\alpha} \dotplus y^n} = \left(y^{m-2} - \frac{y^{m-2} : \alpha}{\frac{1}{\alpha} \dotplus y^n}\right) dy$$

$$=$$

$(\alpha \dotplus x^n)^{-p}$ bestimmt werden müsse, weil solche sich nicht nach den einzeln Faktoren, sondern nach dem ganzen Nenner des gegebenen Bruchs richtet s. das Exemp. 399. X. Erl. Und eben durch diese Bestimmung von L unterscheidet sich auch der Ausdruck

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a \dotplus x^n)^{-p}}$$

von dem $\int \frac{-p\,x^m\,dx}{a \dotplus x^n}$

die sonsten nach der Gleichung ⊙ einerlei gäben, welches doch nicht sein kann. Also kann man hier

$\int \frac{x^m\,dx}{\alpha \dotplus x^n}$ doch nicht so schlechtweg aus I. nehmen, sondern muß da erst L, L, l, gehörig substituiren.

$$= y^{m-2}dy - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{y^{m-2}.dy}{\frac{1}{\alpha} + y^n}$$

und das gesuchte Integral $=$

$$\frac{1}{\alpha}\int\left(y^{m-2}dy - \frac{1}{\alpha}\,\frac{y^{m-2}.dy}{\frac{1}{\alpha}+y^n}\right)$$

$$= -\frac{y^{m-3}}{(m-3).\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}.\int\frac{y^{m-3}.dy}{\frac{1}{\alpha}+y^n}$$

wo sich $\int\frac{y^{m-2}dy}{\frac{1}{\alpha}+y^n}$ aus I. integriren läßt; und

in dem gefundenen Integral $\frac{1}{x}$ statt y gesetzt, giebt das gesuchte durch x ausgedrückt.

Zu IIII.

§. Erl. zu II.

Zu VI.

Man könnte auf den Gedanken gerathen, daß sich die Formel $x^m.(a+bx^n)^p$ für ein verneintes ganzes p in solchen Fällen, wo $\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte Zahl wäre, zugleich nach 248. und nach

398. I. sowohl algebraisch (die Logarithmen bei Seite gesetzt) als transscendentisch integriren lasse. Eine kleine Ueberlegung zeigt aber, daß solches nicht angeht. In solchem Fall wäre nämlich $\frac{n-m-1}{n}$.

$(2x+1) = \left(1-\frac{m+1}{n}\right).(2x+1)$ eine ganze Zahl, also

$$\sin \frac{n-m-1}{n}.(2x+1).\pi = 0$$

und das zweite Glied im Integrale (398. I.), das vom Kreise abhängt, verschwände also, und würde also blos logarithmisch (*) wie es auch nach 248. XIII. werden könnte.

Ueber die Integrirung der Differentiale, die eine zweitheilichte Irrationalgrösse enthalten.

§. 1113 399.

Zu I.

und ausserdem überhaupt, wenn p eine ganze entweder bejahte (248. I.) oder verneinte (398. I. Erl.) Zahl

(*) Weil die Logarithmen, anders als die Kreisbögen, nur einen möglichen Werth haben, so erlaube man mir nur zur Deutlichkeit, logarithmische Integrale von den transcendentischen und algebraischen, zu unterscheiden.

Zahl ist. Der letzte Fall konnte in 248. noch nicht angenommen werden, weil er sich erst auf 397. gründet; und bei denen Umständen, die hier (III.) ausser 248. noch gesucht werden, wird vorausgesetzt, daß p ein Bruch sein soll, daher sich diese Erinnerung im Buche bei II. geschickt hätte.

Zu II.

eine verneinte ganze Zahl ꝛc. ꝛc. oder auch $=0$ ist.

Wenn man dieses Differential mit dem $\frac{M\,dx}{N}$ (397.) vergleicht, so sieht man leicht, daß sich die dortige Integrationsregeln auf das gegenwärtige anwenden lassen. Der Umstand, daß p einen Bruch bedeuten kann, ist nämlich der Voraussetzung, daß M eine Rationalgrösse sein muß, (385.) gar nicht zuwider, weil demohngeachtet z^p hier rational bleibt (259.) Ausserdem ist der Nenner des Bruchs hier in (II.) selbst im Verstande der Anal. endl. Gr. rational, also hat das ganze Differential die Form $\frac{M\,dx}{N}$, und läßt sich also vermittelst der Zerfällung des Nenners in Faktoren (390.) wie die gebrochene Funktion $\frac{M\,dx}{N}$ (397.) integriren. Diese Bemerkung hier in II. daß sich für ein verneintes $\frac{m+1}{n}$ der Ausdruck $x^m.(a+bx^n)^p$ dadurch, daß man

die Potenz z — a in den Nenner bringt, durch eine endliche Reihe integriren lasse, konnte oben (248.) noch nicht beigebracht werden, weil da noch nichts von der Zerfällung des Nenners in Faktoren erwähnt ware. Die gedachte Formel

$$\frac{z^p\,dz}{(z-a)^{1-\frac{m+1}{n}}\,.\,n\,.\,b^{\frac{m+1}{n}}} \quad (\mathfrak{C}$$

läßt sich auch auf die 398. I. bringen. Hier ist nämlich $1-\frac{m+1}{n}$ eine ganze bejahte Zahl; also ist

dort x	m	a	n	— p	b	α
hier z	p	— a	1	$1-\frac{m+1}{n}$	— 1	a

Setzt man nun in (C $\frac{1}{\frac{m+1}{n}\,.\,b^{\frac{m+1}{n}}} = \beta$, und substituirt die genannten Werthe, so verwandelt sich C in

$$\beta\,.\,\frac{x^m\,.\,dx}{(a+bx^n)^{-p}}$$

und das Integral von C wird nach (⊙ in 398. I. Erl.) =

$$-\frac{\beta\,.\,p}{b^{-p}}\,.\int\frac{x^m\,dx}{\alpha+x^n} \quad (\mathfrak{X}$$

das Produkt aus diesem Integral in den beigefügten Faktor ist alsdann

$$\int \frac{z^p \cdot dz}{(z-a)^{1-\frac{m+1}{n}} \cdot n \cdot b^{\frac{m+1}{n}}}$$

und in diesem Integrale aufs neue wegen 248. II. $a + bx^n$ statt z überall substituirt, giebt das eigentlich gesuchte Integral

$$\int x^m \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx$$

das gleichfalls, wie in 248. für ein bejahtes $\frac{m+1}{n}$, nur logarithmisch werden kann, dafern p eine ganze Zahl ist. Es wird nämlich $1 - \frac{m+1}{n}$ und folglich auch $\frac{n-m-1}{n} \cdot (2x + 1)$ eine ganze Zahl, weil in 398. I. $\frac{m+1}{n}$ hier $= \frac{p+1}{1}$ also für ein ganzes bejahtes oder verneintes p allemal eine ganze Zahl ist. Daraus folgt aber, daß im Integrale von (C) ebenso wie Erl. 398. VI. das transcendentische Glied verschwinden müsse, und nur das logarithmische übrig bleibe, daß also auch $\int x^m (a + bx^n)^p \cdot dx$ nur logarithmisch werden könne.

Zu III.

$\frac{\mu}{\nu}$ $\frac{n\mu}{\nu}$

$(a + bx^n)^{\nu} = x^{\nu} \cdot z^{\mu}$ giebt $a + bx^n = x^n z^{\nu}$ also $ax^{-n} + b = z^{\nu}$, daher man sich kürzer so ausdrucken kann: man setze

$$ax^{-n} \pm b = z^v$$

das giebt

$$\frac{z^v - b}{a} = x^{-n}$$

und $$x = \left(\frac{z^v - b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

also $$dx = -\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{z^v - b}{n}\right)^{-\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{dz^v}{a}$$

$$= -\frac{1}{n}(z^v - b)^{-\binom{n+1}{n}} \cdot vz^{v-1}dz$$

$$= \frac{}{a^{-1:n}}$$

$$= -\frac{1}{n} \cdot v \cdot z^{v-1} \cdot dz \cdot a^{1:n}$$

$$= \frac{}{(z^v - b)^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= -v \cdot a^{\frac{}{n}} \cdot z^{v-1} \cdot dz$$

$$= \frac{}{n \cdot (z^v - b)^{(n+1):n}};$$

Ferner $x^n = \frac{a}{z^v - b}$ und $bx^n = \frac{ba}{z^v - b}$,

also $a \pm bx^n = a \pm \frac{ba}{z^v - b} = \frac{az^v - ba \pm ba}{z^v - b}$

$$= \frac{az^v}{z^v - b}$$

Diese

Diese Werthe nun von dx, x, und $a \mp bx^n$ in der Formel (248.) $x^m (a \mp bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} . dx$ substituirt, giebt

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{(z^\nu - b)^{\frac{m}{n}}} \cdot \left(\frac{az^\nu}{z^\nu - b}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \asymp \frac{-\nu . a^{\frac{1}{n}} . z^{\nu-1} . dz}{n . (z^\nu - b)^{(n+1):n}}$$

$$= \frac{-\nu . a^{\frac{m+1}{n} \mp \frac{\mu}{\nu}} . z^{\mu+\nu-1} . dz}{n . (z^\nu - b)^{\frac{m+n+1}{n} \mp \frac{\mu}{\nu}}}$$

welches selbst in der engern Bedeutung rational wird, wenn $\frac{m \mp 1}{n} \mp \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl oder $n = \nu$ und $m \mp 1 \mp \mu$ ein Vielfaches davon ist (IIII. u. V.)

Zu V.

Weil nämlich $n = \nu$ ist, so ist $\frac{m \mp 1}{n} \mp \frac{\mu}{\nu}$

$= \frac{m \mp 1 \mp \mu}{n}$ eine ganze Zahl (III. am E.) folglich der Zähler ein Vielfaches vom Nenner, worunter hier allemal auch das Einfache gezählt wird.

Zu VII.

Statt findet ꝛc. ꝛc. daß nämlich $\frac{m \mp 1}{n} \mp \frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl ist.

Zu

Zu VIIII.

Weil $v = n$ (V.) und $\mu < v$ (VIII.) ſo iſt auch $\mu < n$, und da auſſerdem $m < n$, ſo folgt $m + \mu < n$; nun iſt $\frac{m + 1 + \mu}{n}$ eine ganze Zahl, (V.), alſo muß 1 die Gröſſe $m + \mu$ zu n ergänzen, oder es iſt $m + 1 + \mu = n$, alſo $m = n - \mu - 1$; dieſen Werth nun ſtatt m, und v ſtatt n geſetzt, verwandelt die Formel 248. in die hier im Buche, wo die ganze Vorausſetzung die iſt, daß $\mu < n$ und beide ganze Zahlen ſind, weil vorausgeſetzt wird, daß $\frac{\mu}{v} = \frac{\mu}{v}$ ein in ſeinen kleinſten Zahlen ausgedruckter Bruch ſei, folglich Zähler und Nenner ganze Zahlen ſeien.

Alſo iſt die allgemeinſte Geſtalt, unter der die Formel $x^m (a + b x^n)^p dx$ nach III. rational wird, dieſe

III.) $x^{n-\mu-1+\alpha n} \cdot (a + b x^n)^{\frac{\mu}{n}+\beta} \cdot dx$

ſo daß n, α, β und $\mu < n$ lauter ganze Zahlen ſein müſſen. Es iſt ſchon in VI. erinnert worden, daß die Formel $x^m . (a + b x^n)^p . dx$ unter der Geſtalt I. u. II. rational ſein kann, und nach III. irrational; ich erinnere nur noch, daß ſich ſolches auch umkehren laſſe, ſo daß die genannte Formel nach III. was rationales geben kann, wenn ſie nach I. u. II. was irrationales giebt. So wird die Formel im Ex. X.

nach

nach III. rational, nach I. u. II. aber irrational, weil

$$\left(\frac{1 \pm 1}{2}\right) \pm 1$$

da $\frac{m \pm 1}{n} = \frac{\quad}{3}$ keine ganze Zahl ist;

also muß man bei vorkommenden Fällen allemal prüfen, nach welchen von den genannten Arten die gegebene Formel rational wird, um alsdann das Integral durch eine endliche Reihe zu erhalten, da es sonsten keine Gestalt mehr giebt, unter der die Formel $x^m (a \pm b x^n)^p . dx$ rational würde (XI.)

Zu X.

Um Anfänger von der gehörigen Anwendung der bisherigen Sätze desto besser zu unterrichten, will ich alle Rechnungen, die bei der Integration dieser Formel vorkommen können, völlig aus einander

setzen. Man hat hier $n = 3$, $\nu = 3$, $\mu = \frac{3 \pm 1}{2}$,

und $m = \frac{1 \pm 1}{2}$, also $n = \nu$, und $m \pm 1 \pm \mu$

$= \frac{1 \pm 1}{2} \pm 1 \pm \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \pm \frac{4}{2} = 3$ durch

$n = 3$ theilbar, wie nach (III. oder V.) erfodert wird. Für $\mu = 2$ erhält man nämlich die Formel

$$(a \pm b x^3)^{\frac{2}{3}} . dx$$

Dieß mit der Formel III. verglichen, giebt $m = 0$, $a = a$, $b = b$, $n = \nu = 3$, also $z = \sqrt[\nu]{(a x^{-n} \pm b)}$

$\pm b) = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} \pm b\right)}$; nun iſt aus III. das

Differential $(a \pm b x^3)^{\frac{2}{3}} . dx$

$$= \frac{-v . a^{\frac{m \pm 1}{n}} \pm \frac{\mu}{v} . z^{\mu \pm v - 1} . dz}{n . (z^v - b)^{\frac{m \pm 1}{n} \pm \frac{\mu}{v} \pm 1}}$$

$$= \frac{-3 . a . z^4 dz}{3 . (z^3 - b)^2} = -a . \frac{z^4 . dz}{(z^3 - b) . (z^3 - b)}$$

Dieß zu integriren, könnte man nun wie in (☿ Erl. zu II.) das Integral (398. I.) benutzen, es wäre nämlich

in (☿.)	x	m	n	a	b	p	α
hier	z	4	3	$-b$	1	-2	$-b$

und das Integral wäre nun ☿, nur gehörig *substituirt.*

Ohne aber die Formel 398. I. hier vorauszuſetzen, müßte man ſo verfahren.

Man ſetze das gegebene Differential $= \frac{M dx}{N}$,

und ſuche die dreitheilichten Faktoren von N. Vergleicht man nun $z^3 - b$ mit $a^n \pm z^n$ (392.), ſo iſt dort $z^n = z^3$, alſo $n = 3$ und $a^n = -b$, alſo $a = \sqrt[n]{-b} = \sqrt[3]{-b}$ und der allgemeine Ausdruck für jeden dreitheilichten Faktor von $z^3 - b$ iſt alſo

dort

dort $a^2 - 2az \cdot \text{Cos}\frac{2\varkappa \pm 1}{n} \cdot \pi + z^2$

hier $b^{\frac{2}{3}} + 2z \cdot \text{Cos}\frac{2\varkappa \pm 1}{n} \cdot \pi \cdot \sqrt[3]{b} + z^2$

Hier aber, wo $n = 3$ ist, giebt es für das erste $z^3 - b$ in dem Nenner der gegebenen Formel nur *einen* dreitheilichten Faktor, nämlich für $\varkappa = 0$ (394. II.)

$$\sqrt[3]{b^2} + 2z \cdot \text{Cos}\tfrac{1}{3}\pi + z^2$$

Diesen mit dem

$$p^2 - 2pqx \cdot \text{Cos}\varphi + q^2x^2 \text{ (397. I.)}$$

verglichen, giebt für $q = 1$, $p^2 = \sqrt[3]{b^2}$ also $p = \sqrt[3]{b} = r$, $\varphi = \frac{1}{3}\pi = 60°$ daher $\text{Cos}\varphi = \frac{1}{2}$; ferner hier $M = z^4$, das giebt (397. VIIII.) in dem Ausdrucke $r^\varkappa \cdot \text{Cos}\varkappa \cdot \varphi$, $\varkappa = 4$ gesetzt

$$\mathfrak{M} = r^4 \cdot \text{Cos}\,4 \cdot \varphi = b^{\frac{4}{3}} \cdot \text{Cos}\tfrac{4}{3}\pi$$

und $\mathfrak{m} = r^4 \cdot \sin 4 \cdot \varphi = b^{\frac{4}{3}} \cdot \sin\frac{4}{3}\pi$

Ferner ist hier $d(z^3 - b)^2 = 2(z^3 - b)\,dz^3 = 6z^2 \cdot (z^3 - b) \cdot dz = dN$, also

$$L = \frac{dN}{dz} = 6z^5 - 6 \cdot bz^2$$

um nun hier in L die Werthe von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{l}$ zu erhalten, setze man (397. VIIII.) 1.) wegen z^5, $\varkappa = 5$, das giebt $r^\varkappa \cdot \text{Cos}\varkappa \cdot \varphi = b^{\frac{5}{3}} \cdot \text{Cos}\frac{5}{3}\pi$ und $r^\varkappa \cdot \sin\varkappa \cdot \varphi = b^{\frac{5}{3}} \cdot \sin\frac{5}{3}\pi$; ferner 2.) wegen z^2, $\varkappa = 2$,

$x = 2$, alſo $r^x \,.\, \text{Cof}\, x \,.\, \varphi = b^{\frac{2}{3}} \,.\, \text{Cof}\, \frac{2}{3}\pi$ und $r^x \,.\, \text{ſin}\, x \,.\, \varphi = b^{\frac{2}{3}} \,.\, \text{ſin}\, \frac{2}{3}\pi$ und mit 6 multiplicirt, giebt

$$\mathfrak{L} = 6 \,.\, (b^{\frac{5}{3}} \,.\, \text{Cof}\, \tfrac{5}{3}\pi + b^{\frac{2}{3}} \,.\, \text{Cof}\, \tfrac{2}{3}\pi)$$

und $\mathfrak{l} = 6 \,.\, (b^{\frac{5}{3}} \,.\, \text{ſin}\, \tfrac{5}{3}\pi + b^{\frac{5}{3}} \,.\, \text{ſin}\, \tfrac{2}{3}\pi)$

Ferner

$$\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = \sqrt{b^{\frac{8}{3}} \,.\, \left((\text{Cof}\, \tfrac{4}{3}\pi)^2 + (\text{ſin}\, \tfrac{4}{3}\pi)^2\right)}$$

$$= \sqrt{b^{\frac{8}{3}}} = b^{\frac{4}{3}}$$

und $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = \sqrt{36} \,.\, \left((b^{\frac{5}{3}} \,.\, \text{Cof}\, \tfrac{5}{3}\pi + b^{\frac{2}{3}} \,.\, \text{Cof}\, \tfrac{2}{3}\pi)^2 + (b^{\frac{5}{3}} \,\text{ſin}\, \tfrac{5}{3}\pi + b^{\frac{2}{3}} \,.\, \text{ſin}\, \tfrac{2}{3}\pi)^2\right)$

Dies läßt ſich berechnen, weil alle Gröſſen gegeben ſind, und ich will es ζ heiſſen; das giebt nun in

(397. XI. aus X) $\mathfrak{K} = \dfrac{b^{\frac{4}{3}}}{\zeta}$. Auſſer dem dreitheilichten Faktor giebt es nun noch einen zweitheilichten für das erſte $z^3 - b$, nämlich $a + z$ (394. II.) hier $= \sqrt[3]{-b} + z$, der ſtatt des

$$q^2 x^2 - 2pqx \,.\, \text{Cof}\, \varphi + p^2 \quad (397.)$$

gilt; nun ſubſtituire man in (397. XI.) erſt den Logarithmen des genannten dreitheilichten Faktors und alle übrige Gröſſen; und dann den Logarithmen des zweitheilichten Faktors und die übrige Gröſſen wie vorhin, da dann der zweete Theil des Integrals (XI.) wegfällt (398. I.) Beide Integralen zuſammen addirt, giebt das Integral, das in

$$\frac{z^4 . dz}{(z^3 - b) . (z^3 - b)}$$

von den nur genannten Faktoren des Nenners herrührt; weil aber die nur erwähnten Faktoren blos die von $z^3 - b$ sind, so ist klar, daß der ganze Nenner $(z^3 - b) . (z^3 - b)$, wie ich schon Erl. 398. am E. allgemein erinnert habe, jeden der vorigen Faktoren zweimal enthalten müsse; um also das vollständige Integral von $\frac{z^4 . dz}{(z^3 - b) . (z^3 - b)}$ zu erhalten, muß man die Summe der beiden vorigen Integralen, wie a. a. O. erinnert worden, doppelt nehmen; oder wenn das erste S das zweite s heißt, so ist

$$\int \frac{z^4 . dz}{(z^3 - b)^2} = 2 (S + s)$$

daher

$$\int \frac{-a . z^4 . dz}{(z^3 - b)^2} = -2a (S + s)$$

Nun ist aus (397. XI.) wenn man λ und μ dort aus (X.) bestimmt,

$$S = \frac{b^{\frac{4}{3}}}{\zeta} . \text{Cof}(\lambda - \mu) . \log(\sqrt[3]{b^2} + 2z . \text{Cof}\tfrac{1}{3}\pi + z^2)$$

$$+ \frac{2 . b^{\frac{4}{3}}}{\zeta} . \text{fin}(\lambda - \mu) . \text{Arc tang} \frac{z . \text{fin}\tfrac{1}{3}\pi}{\sqrt[3]{b} - z . \text{Cof}\tfrac{1}{3}\pi}$$

und $s = \frac{b^{\frac{4}{3}}}{\zeta} . \text{Cof}(\lambda - \mu) . \log(z + \sqrt[3]{-b})$

Beides nun addirt, durch $-2a$ multiplicirt, und ſtatt z überall $\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)}$ geſetzt, giebt das tranſcendentiſche Integral

$$\int (a + bx^3)^{\frac{2}{3}} . dx = -\frac{2a . b^{\frac{4}{3}}}{\zeta} \left[\text{Cof}(\lambda - \mu) \times \log\left(\sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)^2} \right) \sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)} . \text{ſin } 60° + 2 . \text{ſin}(\lambda - \mu) \times \text{Arc tang} \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)} . \text{ſin } 60°}{\sqrt[3]{b} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)}} + \text{Cof}(\lambda - \mu) \times \log\left(\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x^3} + b\right)} + \sqrt[3]{-b} \right) \right]$$

das einen möglichen Werth erhält, wenn man für log den einzigen möglichen Logarithmen und für Arc tang. welches unendlich viele mögliche Werthe hat (Alg. 621.) den Bogen nimmt, der zu dieſer Tangente wegen anderer Beſtimmungen gehört. ſ. unten Erl. zu 510. IIII.

Anfänger können hieraus überſehen, wie ſie ſich auch bei andern Fällen der bisherigen Lehren zu bedienen haben.

§. 400.

§. 400. u. 401.

Hat man nämlich nur für einen gewissen Werth von m oder p das Integral von $x^m (a \pm b x^n)^p dx$ schon berechnet, so hat man nicht, alsdann für jeden andern Werth der beiden genannten Grössen, wenn er sich durch $m \pm \alpha n$, $p \pm \beta$ ausdrucken läßt, das ganze Integral der vorigen Formel wieder von neuem zu suchen, sondern kann letzteres allemal aus ersterem durch blose Multiplication finden, wie hier (400; 401;) gewiesen wird; denn daß die Formel im letztern Fall sich allemal rational machen läßt, daferne solches im erstern angeht, ist schon (399. VII.) erinnert worden.

§. 402.

Für ein ungerades m wird hier, da $n = 2$ ist, allemal $\frac{m \pm 1}{n}$ eine ganze Zahl; und es mag m bejaht oder verneint sein, so wird das Integral von $x^m . (a \pm b x^n)^p . dx$ niemalen transcendentisch (248; 399. II. Erl. am E.), und für den ersten Fall nicht einmal logarithmisch, weil hier p ein Bruch ist (248. XIII.), daher die Integrale hier in (II.) alle **algebraisch** werden. Für den zweeten Fall aber werden die Integrale **logarithmisch** (399. II. Erl. am E.) womit III. 403. übereinstimmt.

Für ein gerades m, das ich erst bejaht setzen will, wird $m \pm 1$ allemal ungerad, also hier, für $n = 2$, $\frac{m \pm 1}{n}$ gewiß ein Bruch, mithin 248. unanwend-

bar. Weil aber $\frac{\mu}{\nu} = \frac{-1}{2}$, ſo wird $\frac{m+1+\mu}{n}$ $= \frac{m}{n}$ eine ganze Zahl, alſo iſt die Formel (199. III.) zu gebrauchen, die ſich in

$$\frac{-n \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot dz}{n \cdot (z^n - b)^{\frac{m}{n}+1}} = \frac{dz}{z^{\frac{m+2}{2}}} \cdot \left(\frac{-2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot (z^2+1)$$

verwandelt. Den Faktor zur Linken mit $\frac{x^m dx}{(\alpha + x^n)^{-p}}$ (398. I. Erl.) verglichen, giebt

dort	m	α	n	$-p$	$\frac{m+1}{n}$
hier	0	1	2	$\frac{m+2}{2}$	$\frac{1}{2}$

(⊙

wo der Werth von p, wie dort erfodert wird, eine ganze Zahl iſt; aber der von $\frac{m+1}{n}$ iſt ein Bruch, alſo behält das Integral in dieſem Fall ſein tranſcendentiſches Glied (399. II. Erl. am E.) aber ſein lo-

garith-

garithmisches fällt weg, weil sein Faktor Cos $(n - m - 1) \cdot \frac{2x + 1}{n} \cdot \pi = \cos(1 - m) \cdot \frac{1}{2}\pi = 0$ ist, da $1 - m$ ungerade sein muß. Damit stimmt 402. III. überein.

Für ein gerades verneintes m, das ich hier durch $-m$ ausdrucken will, kommt es auf die Integration der Formel

$$\frac{dz}{(z^2 + 1)^{\frac{2-m}{2}}} \text{ oder } (z^2 + 1)^{\frac{m-2}{2}} \cdot dz$$

an, wo $\frac{m-2}{2}$ für jedes m, das grösser als o ist, offenbar ein algebraisches Integral giebt; und der Fall, da $m = o$, findet sich schon bei den bejahten geraden m (402. III.) der auch in der That nicht hierher gehört, weil erst $-m < o$ verneint wird, und daher nicht $+ o$ sondern $- 2$ die erste verneinte gerade Zahl ist. Hiermit kommt 403 IV. u. V. überein.

§. 403.

Zu II.

Davon ist das Integral ꝛc. ꝛc. Nämlich $\frac{-dz}{1 - z^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{dz}{1 + z} + \frac{dz}{1 - z}\right)$, wenn man (259.) $a = dz$, $b = o$, $\alpha = \varkappa = 1$ setzt, $= -\frac{1}{2}$.

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{d(1+z)}{1+z} - \frac{d(1-z)}{1-z} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\frac{d(1-z)}{1-z} - \frac{d(1+z)}{1+z} \right)$$

also

$$\int \frac{-dz}{1-z^2} = \tfrac{1}{2} \int \left(d\log(1-z) - d\log(1+z) \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\log(1-z) - \log(1+z) \right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1-z}{1+z} \right)$$

wozu keine beſtändige Gröſſe addirt zu werden braucht, wenn es für $z = 0$ verſchwinden ſoll. Nun $\sqrt{(1-x^2)}$ ſtatt z geſetzt, giebt das Integral durch x ausgedruckt, das alſo für $\sqrt{(1-x^2)} = 0$ oder für $x = 1$ verſchwindet.

Integrirung der Differential-Gleichungen, wo die veränderlichen Gröſſen vermengt ſind.

§. 407.

Lauter mögliche Logarithmen ꝛc. ꝛc. oder eigentlich lauter Logarithmen möglicher Gröſſen, weil alle Logarithmen auch unmögliche Werthe haben.

Kreisbogen ſind ꝛc. ꝛc. weil ſich ſolche durch Logarithmen unmöglicher Gröſſen beſtimmen laſſen (324.)

§. 409.

§. 409.

$\mathfrak{B}\sin y = \mathfrak{B}\tang \frac{y}{\sqrt{(1-y^2}}$ ꝛc. ꝛc. Ist nämlich y der zu einem Bogen gehörige Sinus und z die zu ebendem Bogen gehörige Tangente, so giebt die Trigon.

$$\text{Cos} : \sin = 1 : \tang$$

also $\sqrt{(1-y^2)} : y = 1 : z$

und $z = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}$

und weil nun die Tangente z und der Sinus y zu einerlei Bogen gehören, so hat man

$$\text{Bog}\sin y = \text{Bog}\tang \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

so würde bey dem ersten ꝛc. ꝛc. Dergleichen logarithmische Gleichungen lassen sich aber wie algebraische ausdrucken, wenn man sich der Grösse e (222.) bedient. So wird hier aus der Gleichung

$$\log y = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \tfrac{1}{2}x^2$$

diese $\log y = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} + \tfrac{1}{2}x^2 \log e$

$$= \log\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} + \log e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \log\left(e^{\frac{1}{2}x^2}\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

$$= \log\left(\sqrt{e^{x^2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}\right)$$

$$= \log\sqrt{\left(e^{x^2} \cdot \frac{1+x}{1-x}\right)}$$

Folglich $y = \sqrt{\frac{(1+x) \cdot e^{x^2}}{1-x}}$

die das Ansehen einer algebraischen Gleichung hat, wo aber e eine Grösse ist, die sich nicht genau angeben läßt. Indessen könnte man sich dieser Substitution der Grösse e doch bedienen, weil man solche schon genauer berechnet hat, als man sie in allen Fällen braucht.

eine Potenz, deren Exponent unmöglich wäre 2c. 2c. Ganz allgemein ist indessen der Satz nicht, daß eine Gleichung, worin Potenzen von unmöglichen Exponenten vorkommen, sich nicht algebraisch ausdrucken lasse, weil die Summe mehrerer solcher Potenzen in besondern Fällen algebraisch sein kann, wie z. B. $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$; dieser beiden Grössen Summe giebt sich so:

Aus 240. ist

$$a^y = 1 + yla + \frac{y^2(la)^2}{1.2} + \frac{y^3(la)^3}{1.2.3} + \frac{y^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{--}$$

also

$$a^{-y} = 1 - \frac{yla}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1.2} - \frac{y^3(la)^3}{1.2.3} + \text{----}$$

und

und

$$\frac{a^{y} + a^{-y}}{2} = 1 + \frac{y^2.(la)^2}{1.2} + \frac{y^4(la)^4}{1.2.3.4} + \text{---}$$

setzt man nun $y = \sqrt{-1}$, also $y^2 = -1$, $y^3 = +1$, $y^6 = -1$, $y^8 = +1$ ꝛc. so erhält man

$$\frac{a^{\sqrt{-1}} + a^{-\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{(la)^2}{1.2} + \frac{(la)^4}{1.2.3.4} - \text{---}$$

Ist nun la ein Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser $= 1$, so ist aus 296.

$$\text{Cos Bog } la = 1 - \frac{(la)^2}{1.2} + \frac{(la)^4}{1.2.3.4} - \text{---}$$

Folglich ist

$$\frac{a^{\sqrt{-1}} + a^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

der Cosinus eines Bogens, dessen Länge $= la$ und daher $a^{\sqrt{-1}} + a^{-\sqrt{-1}}$ = dem doppelten Cosinus des Bogens, dessen Länge $= la$ ist; also $a = 2$ gesetzt, giebt

$$2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}} = 2 \text{ Cos Bog } l2$$

wo sich l auf natürliche Logarithmen bezieht; nun findet man im vor. St. dieser Erläuter.

$$l2 = 0,69314718$$

Sucht man nun in Hrn. Lamberts Zuſätzen ꝛc. unter den Bogenlängen den auf, der = 0,693147 --- ſo findet man

Bog 39° = 0,680678
Bog 43′ = 0,012508

also Bog 39° 43′ = 0,69318 --.

man hat alſo ſehr nahe

Bog 1 2 = 39° 43′ (*)

Dieſes Bogens Coſinus iſt =

0,76921 ----

und ſein doppeltes =

1,53842 -----

Demnach

$$\sqrt{-1}^{2} + \sqrt{-1}^{2} = 1{,}53842\text{---}$$ (**)

Ich habe dieſen Satz hier beibringen wollen, um zu zeigen, wie behutſam man bei den Rechnungen mit unmöglichen Gröſſen ſein müſſe, daß man nicht ohne Unterſchied jede Aufgabe, die auf dergleichen führt, für unauflösbar halte. Man findet übrigens dieſe Aufgabe auch bei Hrn. Kies a. a. O. wo nur die Rechnung etwas genauer ſein ſollte.

§. 411.

(*) nicht 39° 49′ wie bei Hrn. Kies ſteht; da 39° 43′ ſchon um was weniges zu groß iſt.

(**) nicht 1,536. wie bei Hrn. Kies.

§. 411. Zu II.

allemal eine Summe ausmachen 2c. 2c. d. h. die Gleichungen müssen **gleichartig** (homogeneae) sein.

α **kann andere und andere 2c. 2c.** Es wird nämlich nicht erfodert, daß eine vorkommende Gleichung wie die ⊙ auch nur drei Glieder haben dürfte; sie kann so viel man will haben, zwei davon lassen sich aber allemal durch die beiden äussersten Glieder von ⊙ vorstellen, und jedes andere in der gegebenen Gleichung enthaltene Glied läßt sich durch den allgemeinen Ausdruck $Q\,dx^{n-\alpha}\,dy^{\alpha}$ als das mittlere von ⊙ andeuten, nur muß man jedesmal den Werth von α und Q gehörig substituiren s. das Ex. wo sich die beiden Glieder $x\,dy^3\,dy$ und $-2a\,dy^2$ auf den Ausdruck $Q\,dx^{n-\alpha}\,dy^{\alpha}$ bringen lassen.

so ist $P + Qu^{\alpha} + Ru^{n} = 0$ 2c. 2c. man substituirt nämlich in ⊙ $u\,dx$ statt dy, und dividirt dann überall mit dx^n, so ergiebt sich $P + Qu^{\alpha} + Ru^{n} = 0$, wo u durch P, Q und R als Funktionen von x bestimmt und also selbst eine Funktion von x ist.

Zu V.

s. 20. fig. Tab. I.

so ist es $= \int u\,dx$ 2c. 2c. Nämlich $MN = \frac{CMKL}{a} = \frac{\int z\,dx}{a}$, aber $\frac{z}{a} = u$, also $MN = \int u\,dx$.

Exem.

Exempel. Die gehörige Subſtitution verwandelt nämlich hier die Gleichung

$$P + Qu^{\alpha} + Ru^{n} = o$$

in $$a^3 - a^2xu^4 - x^3u^5 = o$$

aber $u = \frac{z}{a}$, alſo $a^3 - a^{-2}xz^4 - a^{-5}x^3z^5 = o$

oder

$$a^3 - a^3xz^4 - x^3z^5 = o$$

deren Quadratur BN giebt ꝛc. ꝛc. völlig ſo, wie die Quadratur der Hyperbel die logiſtiſche Linie giebt (233. VI.) wo die Gleichung $z = \frac{GCMP}{AG}$ das iſt, was hier die $y = \frac{CMKL}{a}$ daher auch hier BN die Quadratrix der LK heiſſen könnte.

§. 412.

Zu I.

Man ſetze alſo audz ꝛc. ꝛc. d. h. weil z, u, völlig unbeſtimmt ſind, in der Gleichung K das zweite Glied zur Linken des Gleichheitszeichens dem erſten zur Rechten deſſelben gleich zu ſetzen; daraus folgt aber, daß alsdann das erſte Glied zur Linken in K auch dem zweiten zur Rechten müſſe gleich angenommen werden, damit die Gleichung ihre Richtigkeit behalte.

Aus ihr wird das Integral ꝛc. ꝛc. Es ist nämlich $\frac{a\,du}{u^n} = a u^{-n}\,du = \frac{a.(-n+1).u^{-n}\,du}{-n+1}$,

also $\int \frac{a\,du}{u^n} = \int \frac{a.(-n+1).u^{-n}\,du}{-n+1} = \frac{au^{-n+1}}{-n+1}$

$+ \text{Const} = \text{Const} + \frac{au^{-(n-1)}}{-(n-1)}$ oder $= c - \frac{a}{(n-1).u^{n-1}}$ wo man nur $\frac{y}{z}$ statt u setzen darf, um die Gleichung O aus der N zu erhalten. Nun ist $z = e^{\int (p\,dx : a)}$, also hat man

$$c - \frac{a.e^{(n-1).\int (p\,dx : a)}}{(n-1).y^{n-1}} = b\int e^{(n-1).\int (p\,dx : a)}.q\,dx$$

eine Gleichung zwischen x und y, wo dx nur in Funktionen von x multiplicirt ist, und also die veränderlichen Grössen von einander gesondert sind.

Zu II.

daraus kommt in II. ꝛc. ꝛc. nämlich

$$\int z^{n-1} q\,dx = \int x^{\frac{f}{z}.(n-1)}.x^m\,dx =$$

$$\int x^{\frac{(n-1).f}{a}+m}.dx = \int x^{\frac{(n-1).f+ma}{a}}.dx$$

$$= \frac{x^{\frac{(n-1).f+(m+1).a}{a}}}{\frac{(n-1).f+(m+1).a}{a}}$$

und

und dieß iſt weiter $= c - \frac{a z^{n-1}}{(n-1) . y^{n-1}} =$

$\frac{(n-1) . f}{a}$

$c - \frac{a x}{(n-1) . y^{n-1}}$, daß man alſo um eine Integralgleichung zwiſchen x und y hat, welches der Zweck der Abſonderung iſt.

Zu IIII.

Es iſt $\int z^{n-1} (x^2 \pm x) . dx$ oder $\int e^{(n-1).x} (x^2 \pm x) . dx$ die Summe zwoer Integrale, deren jedes ſich aus 242. giebt, nämlich $= \int e^{(n-1).x} . x^2 dx \pm \int e^{(n-1).x} . x dx$;

das erſte mit $e^{mx} x^{\varepsilon} dx$ (242.) verglichen giebt

dort	m		ε
hier	n — 1		2

das zweite damit verglichen, giebt

dort	m		ε
hier	n — 1		1

und dieſe Subſtitution giebt 242. aus der dortigen Formel (S. 170.)

$$\int e^{(n-1).x} x^2 dx = e^{(n-1).x} . \left(\frac{x^2}{n-1} - \frac{2x}{(n-1)^2} \pm \frac{2}{(n-1)^3} \right) \int e$$

dann

$$\int e^{(n-1).x} x\,dx = e^{(n-1).x}.\left(\frac{x}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2}\right)$$

also beider Summe oder

$$\int z^{n-1}.(x^2 \pm x).dx = \frac{e^{(n-1).x}}{n-1}.\left\{x^2 - \frac{2x}{n-1} \pm \frac{2}{(n-1)^2} \pm x - \frac{1}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{e^{(n-1).x}}{n-1}.\left(x^2 \pm \frac{(n-3).x}{n-1} - \frac{n-3}{(n-1)^2}\right)$$

und so hat man aus der im Buche am Ende von IIII. genannten Differentialgleichung die Integralgl.

$$\frac{be^{(n-1).x}}{n-1}.\left(x^2 \pm \frac{(n-3).x}{n-1} - \frac{n-3}{(n-1)^2}\right)$$

$$= c - \frac{ae^{(n-1).x}}{(n-1).y^{n-1}}$$

oder

$$b.\left(x^2 \pm \frac{(n-3).x}{n-1} - \frac{n-3}{(n-1)^2}\right) = \frac{(n-1).c}{e^{(n-1).x}} - \frac{a}{y^{n-1}}$$

Zu V.

wie in IIII. ꝛc. ꝛc. die dortige Integralgleichung hat zwar das Anſehen einer algebraiſchen, weil weder Kreisbögen noch Logarithmen drinnen vorkommen; man muß aber bedenken, daß e, die darin enthalten iſt, ſich auf die Natur der Logarithmen gründet.

Zu VII.

Die Gleichung verwandelt ſich alſo in $a\,d\,y$ (ſ. die Druckf.) $= y\,p\,d\,x$ ꝛc. ꝛc. oder eigentlich in $a\,d\,y = b\,y\,p\,d\,x$; ſetzt man aber $\frac{a}{b} = \alpha$, ſo erhält ſie die Geſtalt im Buche $\alpha\,d\,y = y\,p\,d\,x$.

ſo iſt $n = o$ oder ꝛc. ꝛc. Iſt nämlich $n = o$, ſo wird aus H die Gleichung $a\,d\,y = y\,p\,d\,x + b\,q\,d\,x$, die ſich nicht wie die VI. behandlen läßt, ſondern die im Buche genannte Integralgleichung giebt. Daraus aber, daß y nicht höher als von der erſten Potenz in H vorkommen ſoll, folgt nicht nothwendig $n = o$, weil n auch Brüche bedeuten kann, da dann nach I. zu verfahren wäre. Im Buche iſt es alſo wohl ein bloſes Verſehen, daß der Satz: „ſo iſt $n = o$„ zu einem Folgerungsſatz iſt gemacht worden, da er eine Prämiſſe ſein ſollte.

§. 413.

Zu IIII.

Durch die beſtändigen Gröſſen gegeben ſind ꝛc. ꝛc. Weiß man nun, was für ein

Werth

Werth von y in irgend einem Fall einem gewissen Werth von x zugehört, daß z. B. $y = v$ für $x = t$ sei, so ist

$$\text{Const}^{\omega} = (v - At)^{\alpha} \cdot (v - Bt)^{\beta}$$

und weil nun $(y - Ax)^{\alpha} \cdot (y - Bx)^{\beta} - \text{Const}^{\omega} = 0$ ist, so hat man

$$(y - Ax)^{\alpha} \cdot (y - Bx)^{\beta} - (v - At)^{\alpha} \cdot (v - Bt)^{\beta} = 0 \quad (\text{☿})$$

als die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y.

Zu V.

Man setze $dz = 0$ ꝛc. ꝛc. Dieß ist eine Voraussetzung, die hier verstattet ist. Die Aufgabe enthält nämlich eine Gleichung für $\frac{dy}{dx}$, nämlich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax^m + bx^{m-1} \cdot y \cdots + zy^m}{px^m + qx^{m-1} \cdot y \cdots + \omega y^m} \quad (\text{♄})$$

Nun sind hier x und y beide noch völlig unbestimmte Grössen, ohne daß $\frac{y}{x}$ auf irgend eine Art bestimmt wäre; also kann man der Differentialgleichung (♄) ohnbeschadet annehmen, es soll $\frac{y}{x}$ eine beständige Grösse seyn. Damit wird nicht gesagt, daß aus der Natur der Gleichung ♄ nothwendig folge, es müsse $\frac{y}{x}$ eine beständige Grösse sein, sondern nur

ſoviel: die Allgemeinheit der Gleichung ♄ verſtatte beide Vorausſetzungen, ſowohl daß $\frac{y}{x}$ eine veränderliche, als daß ſie eine beſtändige Gröſſe ſei. Die Integralgleichung, die ſich aus der erſten Vorausſetzung ergiebt, iſt von I. bis IIII. betrachtet worden; nach der letzten Vorausſetzung aber hat man, wenn die beſtändige Gröſſe $\frac{y}{x}$, z heißt, blos $dy = z\,dx$, und dieſer Fall wird hier in V betrachtet, wo gewieſen wird, daß die Gröſſe z, ob ſie gleich beſtändig iſt, doch mehrere nämlich $m \dotplus 1$ Werthe hat, weil ſie durch eine Gleichung vom $m \dotplus 1$ten Grade beſtimmt wird. So wie nun nach der erſten Vorausſetzung die Integration eine Gleichung giebt (☿), die einer krummen Linie von einer höhern Ordnung zugehört, ſo giebt die letzte hier in V die Integralgleichung

$$y = z\,x$$

vom erſten Grad, wo aber z, $m \dotplus 1$ verſchiedene Werthe hat, die ſich alle aus der im Buche angeführten beſtimmten Gleichung für z ergeben, d. i. die zwote Vorausſetzung giebt $m \dotplus 1$ Integralgleichungen alle von der Form

$$y = z\,x$$

und die alſo der geraden Linie zugehöre. Das giebt im Buche den Schluß: **auſer der krummen Linie alſo ꝛc.**

§. 414.

Es ist nämlich $(ax^m \dotplus bx^{m-1}y' \dotplus \text{----} \dotplus zx^{m-n}y^n)^e = \left(x^m.\left(a \dotplus \frac{by}{x} \text{---} \dotplus \frac{zy^n}{x^n}\right)\right)^e$

$= x^{me}.\left(a \dotplus b\frac{y}{x} \text{----} \dotplus z\left(\frac{y}{x}\right)^n\right)^e$; aber $\frac{y}{x}$

$= z$, folglich $= x^{me}.(a \dotplus bz \text{---} \dotplus zz^n)^e$, wo e jede Grösse bedeuten kann und also nicht mit der 232 einerlei ist.

§. 416.

Exemp. Hier sollte so gedruckt sein:

	für F		für G
e =	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
α =	1	0	0
ε =	0	0	1
m =	5	4	3
λ =	2	2	2

wo wie sich gehört λ überall einerlei ist (415.) Wie sich diese Werthe hier ergeben, ist nicht schwer zu begreifen; nur wegen m bemerke ich, daß solches überhaupt die Summe der Exponenten von x und y in jedem Glied bedeutet. Hier im Ex. hat man zwei F 1.) $x^5\sqrt{y^4x}$ 2.) $\sqrt{(x^4 \dotplus x^3y)}$; dem ersten F gehört die erste vertikale Reihe, welche die Werthe von e, α ꝛc. enthält, zu; und so dem zweiten F die zwote vertikale Reihe. Beim ersten F

enthält die Wurzelgrösse das Glied $y^4 x'$, und weil die Summe der Exponenten $4 + 1 = 5$ ist, so giebt das in der ersten Reihe $m = 5$; beim zweiten F enthält die Wurzelgrösse die Glieder x^4, $x^3 y'$, und weil da $3 + 1 = 4$ die Summe der Exponenten von jedem Glied ausmacht, so enthält die zwote vertikale Reihe $m = 4$; und so geben sich für jedes der beiden F, nur gehörig mit der Funktion $x^{\alpha} y^{\varepsilon} (a x^m ---- + \varkappa x^{m-n} y^n)^e$ verglichen, die Werthe der übrigen Buchstaben in beiden vertikalen Reihen, und ebenso $G = y \sqrt[3]{x y^2}$ mit angeführter Funktion verglichen die dritte Vertikalreihe. Man sieht aber leicht, daß man um λ zu wissen nur eine solche Reihe nöthig hat, und um T und V zu finden, darf man nur in jedem F; z statt y, 1 statt x setzen; das x nämlich, das hier als ein Faktor weggelassen wird (da eigentlich $y = x \cdot z$ und $x = x \cdot 1$ ist) kommt als ein **abgesonderter Faktor** in der Potenz x^{λ} (415.) vor. Die verschiedenen F auf solche Art verwandelt und zusammen addirt geben T (415.) und ebenso die verschiedenen G (deren hier nur eines vorhanden) verwandelt und zusammen addirt geben V; die Werthe von T und V nun in der Gleichung

$$\frac{-dx}{x} = \frac{V\,dz}{T + Vz}$$

substituirt, giebt eine Differentialgleichung, deren Integration ein Verfahren, wie das 413. fodert, und die Integralgleichung, die sich so ergiebt, gehört einer krummen Linie zu, wenn z veränderlich ist, so wie für ein beständiges z solche geraden Linien zugehört.

Das

Das bisherige dient zur Erläuterung des Vortrags im Buche, der in der That für einen geübten Leser, wie ihn Hr. Hofrath Kästner voraussetzt, untadelhaft ist. Anfängern aber, für die ich hier schreibe, könnte das so angegebene Verfahren geheimnisvoll und schwierig vorkommen: deßwegen erinnere ich hiermit kurz, daß mit dem allem nur so viel gesagt wird: man setze in der vorgegebenen Differentialgleichung nur zx statt y und reducire sie alsdann auf ihre einfachste Form, so erhält sie von selbst die Gestalt

$$x^{\lambda}.T\,dx \dotplus x^{\lambda}.V.(z\,dx \dotplus x\,dz) = 0$$

woraus man die Werthe von T und V nehmen kann, die man dann in der Gleichung $\frac{-dx}{x} = \frac{V\,dz}{T \dotplus Vz}$ substituirt, und letztere zu integriren, verfährt man wie 413.

Integrirung der Differentialgleichungen durch Reihen ꝛc. ꝛc.

§. 419.

Die Gleichung (S. 373.) ergiebt sich, wenn man in der gegebenen Gleichung (S. 371.) die Werthe von y und dy so substituirt, wie sie sich aus der Gleichung (S. 372.) ergeben. Weil nun (S. 373.) die sämtliche zu einerlei Potenz von x gehörigen Coefficienten zusammen die 0 ausmachen müssen, so hat man

1.) $abA - a^2 = 0$ also $A = \frac{a}{b}$

2.) $2abB + aA - bA = 0$, also

$$B = \frac{(b - a).A}{2ab}$$

u. s. w.

Solchergestalt ergeben sich die Werthe aller Coefficienten A, B, &c. soweit man sie verlangt, und die Gleichung S. 372. giebt also y durch x.

§. 421.

denn in der Reihe die aus $y^\varepsilon x^\varkappa$ wird &c. &c.

Es ist nämlich $y^\varepsilon = \left((Ax^m + \text{---}) + (Rx^{m+r\delta} + \text{---})\right)^\varepsilon = (Ax^m + \text{---})^\varepsilon + \varepsilon.(Ax^m + \text{---})^{\varepsilon-1}.(Rx^{m+r\delta} + \text{---}) + \text{---} = A^\varepsilon x^{m\varepsilon} + \text{---} + \varepsilon(A^{\varepsilon-1} x^{m\varepsilon-m} + \text{---}).(Rx^{m+r\delta} + \text{---}) + \text{---} = A^\varepsilon x^{m\varepsilon} + \text{---} + \varepsilon A^{\varepsilon-1}.R.x^{m\varepsilon+r\delta} + \text{---}$, und daher $y^\varepsilon x^\varkappa = A^\varepsilon x^{m\varepsilon+\varkappa} + \text{---} + \varepsilon A^{\varepsilon-1}.R.x^{m\varepsilon+r\delta+\varkappa} + \text{---}$ wo R zuerst bei dem Expon. $m\varepsilon + r\delta + \varkappa$ vorkommt. Und die Gleichung $y = Ax^m + \text{---} + Rx^{m+r\delta} + \text{---}$ differentiirt giebt

$$dy = A.mx^{m-1}dx + \text{---} + R.(m+r\delta)\,x^{m+r\delta-1}dx + \text{---}$$

wo R zuerst beim Exp. $m + r\delta - 1$ sich befindet. Nun ist der Reihe $y^\varepsilon x^\varkappa$ erstes Glied $Ax^{m\varepsilon+\varkappa}$

und

und der Reihe dy ihr erstes $Amx^{m-1}dx$ woraus also der Satz im Buche erhellet.

§. 422.

das zuerst R hat multiplicirt, den Exp. $\delta - 1 \dotplus \varkappa$ &c. &c. Dieß muß ein Versehen sein. Eigentlich bleibt der Satz 421. daß überhaupt in jedem Theil der Differentialgleichung wie $x^{\varkappa}y^{\varepsilon}dy$, R da zuerst vorkommt, wo der Exp der dort angegebene ist. Nun kommt das Glied, das diesen Exp. und R hat, zweimal vor; einmal im Produkt aus demjenigen Glied der Reihe für $x^{\varkappa}y^{\varepsilon}$, das zuerst R enthält, in das erste Glied der Reihe dy, und fürs zweite im Produkt aus dem Glied der Reihe dy, wo R zuerst vorkommt, in das erste der Reihe $x^{\varkappa}y^{\varepsilon}$. Wird nun $m = o$, so wird der Exponent 421. hier $= r\delta - 1 \dotplus \varkappa$; für den zweiten Fall fällt solches in die Augen; für den ersten ergiebt sich zwar ebender Werth des Exponenten, aber das ganze Glied, das diesen Expon. mit R enthält, wird mit m multiplicirt; und verschwindet also eigentlich für den ersten Fall das Glied, das zuerst R enthält. Das ist die Ursache, warum für den ersten Fall der Exponent nicht den Werth $r\delta - 1 \dotplus \varkappa$ erhält; ihn zu erhalten muß man nämlich, wie im Buche angegeben wird, ein Produkt, nicht mehr aus dem eigentlich ersten, sondern dem nächstfolgenden $\delta B x^{\delta-1}$ in $A.R.x^{m\varepsilon \dotplus r\delta \dotplus \varkappa}$ (421.) machen; das giebt den Exponenten $r\delta \dotplus \varkappa \dotplus m\varepsilon \dotplus \delta - 1 = (r \dotplus 1)\delta \dotplus \varkappa - 1$

✠ x — 1 weil m = o iſt. Das Glied alſo, das dieſen Expon. hat, enthält zwar gleichfalls R, aber offenbar kommt es erſt ſpäter vor, als das Glied mit dem Expon. r δ — 1 ✠ x, welches damit übereinſtimmt, daß R nicht eher vorkommt, als beim Exponenten r δ — 1 ✠ x.

§. 424.

aus jener ſchon beſtimmt ꝛc. ꝛc. weil nämlich in ((die Summe aller zu jeder Potenz von x gehörigen Coeff. = o ſein muß, wodurch bekanntlich die Coeff. A, B---- R alle beſtimmt werden.

§. 425.

ſo findet ſich R gar nicht ꝛc. ꝛc. Da wird nämlich in der Reihe für y das Glied $Rx^m \text{✠} r\delta = Rx^o = R$ und $dR = o$.

So viel, als ich von 419. bis hierhin beigebracht habe, ſchien mir nöthig, Anfängern den Vortrag im Buche bis 466. begreiflich zu machen, was noch bis auf 466. folgt, ſind meiſtens zuſammenhängende, auf den ſchon im erſten Bande der Analyſis weitläuftig genug aus einander geſetzten Gebrauch des Newtoniſchen Parallelogramms gegründete Rechnungen, die ich deßwegen der Gedult und dem eigenen Nachdenken jedes Anfängers überlaſſe, zumal da ſie wegen 466. ziemlich entbehrlich ſind. ſ. Hrn. Hofr. Erinner. 470. am Anf.

§. 466. u. 467.

1. Um nämlich y^2 zu erhalten, quadrirt man hier die Reihe für $y = Ax^\alpha \text{✠} Bx^\beta$---- nach 56.

oder

oder Erl. der Alg. 625. und ebenso $dy = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1}$ --- wo $dx = 1$ gesetzt wird, quadrirt, und mit r^2 multiplicirt giebt $r^2 dy^2$ wie im Buche.

2. Soll nun $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma}$ --- eine steigende Reihe sein, so hat man $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta$ u. s. w. daß also β, γ kleinere verneinte Zahlen als α, β sein müssen, wenn α verneint ist, wodurch alsdann die Reihen für y^2 und $r^2 dy^2$ (S. 420.) steigend werden.

3. Um die Exponenten und Coeff. der Reihe

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} \text{ ----} \quad (\text{ð}$$

gehörig zu bestimmen, muß man die Reihen für die verschiedenen Glieder der gegebenen Gleichung

$$r^2 dy^2 - r^2 + y^2 = 0 \quad (\text{ħ}$$

d. i. die Gliederreihen (S. 420.) gehörig zusammen in eine Gleichungsreihe schreiben, wo nämlich die zu einerlei Potenz von x gehörigen Coefficienten gehörig unter einander geschrieben werden, die dann in ihrer Summe allemal die 0 ausmachen.

4. Weil diese Gleichungsreihe eine steigende sein soll, so muß sie mit dem Glied anfangen, das den niedrigsten Expon. hat, da dann drei Fälle in Erwägung zu ziehen sind I. wenn α sein soll II. wenn es $= 0$ III. wenn es bejaht sein soll.

5. In der Reihe für y^2 ist die niedrigste Potenz $x^{2\alpha}$, in der für $r^2 dy^2$ ist sie $x^{2\alpha-2}$, mit welcher letztern also, weil $2\alpha - 2 < 2\alpha$ ist, die

Gleichungsreihe anfangen muß. Nun iſt der ganze zu $x^{2\alpha - 2}$ gehörige Coefficient $= \alpha^2 A^2 r^2$, der nach (no. 3.) $= 0$ geſetzt eines von dreien erfodert, entweder I. $r = 0$ oder II. $\alpha = 0$ oder III. $A = 0$; aber r iſt eine in der Gleichung ♄ beſtimmte Zahl, α iſt wegen der Vorausſetzung hier verneint; und $A = 0$ gäbe $Ax^{\alpha} = 0$, welches ungereimt iſt, weil in der Gleichung ♃ Ax^{α} überhaupt ein allgemeiner Ausdruck des erſten Glieds iſt, womit die Reihe ♃ ihren Anfang nimmt. Alſo führt die Vorausſetzung, daß α verneint ſein ſoll, auf ungereimte Folgen und findet deßwegen nicht ſtatt.

6. Nimmt man aber an, es ſoll $\alpha = 0$ ſein, ſo iſt der Coeff. des Glieds, womit die Gleichungsreihe anfängt (no. 5.) $= \alpha^2 A^2 r^2 = 0$, wodurch A noch nicht beſtimmt wird; das erſte Glied in ♃ verwandelt ſich übrigens bei dieſer Vorausſetzung in A oder in eine beſtändige Gröſſe, welches angeht. Man behalte alſo dieſe Vorausſetzung, daß $\alpha = 0$ ſein ſoll, bei; ſie giebt aus den Gliederreihen (S. 420.) die Gleichungsreihe (S. 421.), nur daß (S. 421.) noch einige Glieder hinzugeſetzt worden, die bei den Gliederreihen weggelaſſen ſind, und daß die ganze Gleichungsreihe ſchon ſo hingeſchrieben worden iſt, wie in der Folge noch gewieſen wird.

7. Nun ſucht man weiter β, B u. ſ. w. wie im Buche gewieſen wird, wo der Vortrag nun Anfängern verſtändlicher ſein wird.

(Seite 422.) geht alſo nicht dazu an ꝛc. ꝛc. weil $A^2 - r^2$ zu x^0 gehört.

als den, dessen Exponent $2\beta - 2$ ist
2c. 2c. daß also die Voraussetzung $B = 0$ zugleich die Folge hat, es könne kein anderer als der zum Exponent $2\beta - 2$ gehörige Coeff. zusammen mit $A^2 - r^2 = 0$ sein; aber $B = 0$ giebt den Coefficienten für sich und daher auch $A^2 - r^2$ für sich $= 0$ und für y einen beständigen Werth, der hier nicht gesucht wird; deßwegen nimmt man die im Buche erwähnte zwote Voraussetzung an, daß nämlich der zum Expon. $2\beta - 2$ gehörige Coefficient *nur* in der Summe mit $A^2 - r^2 = 0$ sein, und das giebt $B = \frac{\sqrt{(r^2 - A^2)}}{r}$, wo übrigens $\beta = 1$ bleibt. Man hat also nun schon

$$y = A \pm \frac{\sqrt{(r^2 - A^2)}}{r} x \pm \text{---}$$

also wäre $2\beta - 2 = 0$ 2c. 2c. s. die Erl. zu den Worten: geht also nicht dazu an.

auch $A^2 - r^2 = 0$ 2c. 2c. Damit nämlich $A^2 - r^2 \pm \beta^2 B^2 r^2$ als der zu x^0 gehörige Coeff. $= 0$ würde.

und $B, C, D, = 0$ 2c. 2c. Nämlich $y \overline{\pm} r = B x^{\beta} \pm C x^{\gamma}$ ---- wo $B x^{\beta}$ wieder ein allgemeiner Ausdruck des ersten Glieds ist; wäre also solches $= 0$, so wäre in

$$y \overline{\pm} r = 0 \pm C x^{\gamma} \text{ ----}$$

das

das Glied Cx^{γ} das erſte, aber dieſer Ausdruck iſt mit dem Bx^{β} völlig einerlei, folglich müßte er gleichfalls und alſo $C = 0$ ſein, und ebenſo D, E, u. ſ. w. $= 0$.

Von den Differentialen für gewiſſe Werthe der veränderlichen Gröſſe.

§. 471.

ſo iſt $dy = p\,dx + \frac{1}{2} q\,dx^2$ ꝛc. ꝛc. Dieſe Reihe muß abbrechen, ſobald eine der Funktionen p, q, r ꝛc. einen beſtändigen Werth erhält; es ſei nämlich r eine beſtändige Gröſſe und $dr = s\,dx$, $ds = t\,dx$ ꝛc. ſo iſt weil r beſtändig iſt, $dr = 0$, alſo $s\,dx$ mithin $s = 0$, und nun auch ds folglich $t\,dx$ und daher $t = 0$ ꝛc.

§. 473.

Für $y = (a - x) . x$ iſt

$$dy = d(ax - x^2)$$
$$= (a - 2x) . dx$$

Dieß verglichen mit

$$\text{☿)}\quad dy = p\,dx + \tfrac{1}{2} q\,dx^2 \text{----(471.)}$$

giebt $a - 2x = p$; und nun dieſen Werth von p differentiirt, ſo wird

$$dp = -2\,dx$$

vergli-

verglichen mit

$$dp = q\,dx \quad (471.)$$

giebt $-2 = q$

wo q einen beständigen Werth hat, und daher die Reihe für dy abbricht (Erl. 471.)

Diese Werthe nun für p und q in ♆ gesetzt, giebt

$$dy = (a - 2x).dx - dx^2$$

für $2x = a$ wird also ꝛc. ꝛc. Anfängern könnte dieß zu einer Verwirrung Anlaß geben. Setzte man nämlich in die gegebene Gleichung $y = (a - x).x$; $2x$ statt a, so wäre $y = (2x - x).x = x^2$; und bekanntlich ist $d(x^2) = 2x\,dx$, welches dem im Buche $dy = -2\,dx^2$ widerspricht. Dieser Zweifel läßt sich aber leicht heben. Nämlich die Substitution eines veränderlichen Werthes für eine beständige Grösse geht nicht an, ob es gleich umgekehrt verstattet ist, unter mehrern veränderlichen Werthen, die einer Grösse zukommen, einen solchen zu nehmen, der dem Werth einer beständigen Grösse gleich ist. Es ist daher im Buche die Meinung eigentlich diese: x und y sind Funktionen von einander, deren eine sich ohne die andere nicht ändern kann; nun sucht man die Verhältniß der Veränderung von y zur Aenderung von x, wenn solche aus dem Zustand treten wollen, wo x der halben beständigen Grösse a gleich ist, und da findet sich

$$dy = -2\,dx^2 \quad \text{also}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\,dx = 0 \quad \text{(Erl. 23. no. 2.)}$$

Daraus folgt also, daß dy gegen dx verschwindet,

oder

oder wann x und y sich in dem Zustand befinden, wo $x = \frac{1}{2} a$ ist, so tritt x unendlich schneller in den nächstfolgenden Zustand, als y; und zwar auf entgegengesetzte Art wegen des Zeichens —. Stellt y die Quadrate der Ordinaten und x die zugehörigen Abscissen vor, so bezieht sich die Gleichung $y = ax - x^2$ auf den Kreis, von dem auch der nur erwähnte Satz gilt.

§. 475.

Die Gleichung

$$dy = y.(1 + lx).dx \quad (\varphi$$

verglichen mit

$$dy = p\,dx + \tfrac{1}{2} q\,dx^2 \cdots$$

giebt $p = y.(1 + lx)$

$$dp = (1 + lx).dy + y.dlx$$

aber aus (♀) ist $dy = y.(1 + lx).dx$, und über-

das $dlx = \frac{dx}{x}$ (219. IIII.), also

$$d^2p = (1 + lx).y.(1 + lx).dx + y.\frac{dx}{x}$$

$$= \left(y.(1 + lx)^2 + \frac{y}{x}\right).dx$$

Dieß verglichen mit $dp = q.dx$, giebt

$$q = y.(1 + lx)^2 + \frac{y}{x}$$

aber hier ist $x = \frac{1}{e}$, wo e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme 1 ist, also

$lx = -1$, und daher

$q =$

$$q = y.(1-1)^2 + \frac{y}{x}$$

$$= \frac{y}{x} = \frac{x^x}{x}\, x^{x-1} = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}-1\right)$$

Weil nun für den genannten Werth von x, $p = y.(1+lx) = y.(1-1) = o$ wird, so wird hier aus (372.)

$$dy = \tfrac{1}{2} q\, dx^2 = \tfrac{1}{2}.\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}-1\right), dx^2$$

s. die Druckf.

Betrachtungen über die Differentialen der Funktionen, die zwo veränderliche Grössen enthalten.

§. 479.

Hier ist $dV =$

$$\frac{\tfrac{1}{2}ey^e dy + \tfrac{1}{2}eyx^{e-1}.dx - \tfrac{1}{2}exy^{e-1}.dy - \tfrac{1}{2}ex^e dx - y^e dy + y^e dx - x^e dy + x^e dx}{M}$$

$$= \left(\frac{\tfrac{1}{2}ey.x^{e-1} - \tfrac{1}{2}ex^e + y^e + x^e}{M}\right).dx$$

$$+ \left(\frac{\tfrac{1}{2}ey^e - \tfrac{1}{2}exy^{e-1} - y^e - x^e}{M}\right).dy$$

wo

wo der Faktor bei $dx = P$ und der bei $dy = Q$ geſetzt die beiden Gleichungen im Buche giebt, und

$$Px + Qy = \frac{(\frac{1}{2}e - 1).(x^e + y^e).(y - x)}{M\left(= (y-x)^2.\sqrt{(y^e + x^e)}\right)}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}e - 1).\sqrt{(y^e + x^e)}}{y - x}$$

$$= (\tfrac{1}{2}e - 1).V$$

wie nach 478. erfodert wird, da hier $n = \frac{1}{2}e - 1$ iſt.

§. 484.

So iſt in 481. ꝛc. ꝛc. Setzt man nämlich a. a. O. d ſtatt δ, alſo $\tau - V = dV$, ſo verwandelt ſich

a. a. O. für $\delta x = o$, $\tau - V$ in $b\,\delta y$
alſo hier für $dx = o$, dV in $b\,dy$

d. i. wenn man in dV blos y als veränderlich anſieht, wodurch dann $dy = o$ wird, ſo wird $dV = a\,dx$ oder

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = a.$$

§. 485.

Nimmt man nämlich in der Differentialgleichung

$$dV = P\,dx + Q\,dy$$

erſt blos x als veränderlich an, ſo wird $dy = o$ (Erl. 23. no. 1.) alſo

1.) $dV = P\,dx$

und

und nun blos y als veränderlich und x als beständig betrachtet, giebt $P\,dx = 0$, und

2.) $dV = Q\,dy$

Differentiirt man nun beide Werthe von dV aufs neue, und sieht dabei umgekehrt im ersten blos y, im lezten blos x als veränderlich an, so wird

1.) $d(P\,dx) = (dP).dx$

2.) $d(Q\,dy) = (dQ).dy$

folglich vermöge des Lehrs. 481.

$$(dP).dx = (dQ).dy$$

oder

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$$

§. 486.

aber $\frac{dQ}{dx}$ ꝛc. ꝛc. Hier wäre das 481. angenommene Bedingungszeichen ( ) überflüßig, weil Q keine andere Grösse als die x enthält.

Von den Differentialen der Funktionen, die drei veränderliche Grössen enthalten.

Dieser ganze Abschnitt ist eine Folge des vorigen.

§. 490.

die dritte Differentiation giebt ꝛc. ꝛc.

Bei der dritten Differentiation wird nämlich alles,

was nichts von z enthält, als beständig angenommen; so giebt die zwote Differentiation bei der ersten Ordnung

$$\frac{2xdxdy}{v} \text{ oder } \frac{2xdxdy}{a^2 - z^2}$$

und dieß nach der erwähnten Voraussetzung zum drittenmal differentiirt, giebt

$$d\left(2xdxdy.(a^2 - z^2)^{-1}\right) = -2xdxdy.$$
$$(a^2 - z^2)^{-2}.d(a^2 - z^2)$$
$$= \frac{-2xdxdy.(-2zdz)}{(a^2 - z^2)^2}$$
$$= \frac{4zxdxdydz}{a^2 - z^2}$$

und so auch bei den übrigen Ordnungen.

Von den Differentialgleichungen.

§. 499.

Man bedient sich zuweilen ꝛc. ꝛc. Ein geübter Verstand wird bei vorkommenden Fällen leicht finden, ob und wie die Multiplication zur Erfindung einer Integralgleichung dienen kann.

Ex. Es sei

$$adx - bxdy = 0$$

so ist $ax = b\int xdy + \text{Const}$

wo

wo sich zwischen x und y keine Gleichung ergiebt; man multiplicire aber die gegebene Differentialgleichung mit $\frac{1}{x}$, so wird

$$\frac{a\,dx}{x} - b\,dy = 0$$

also $a\,lx = b\,y \dotplus$ Const.

Fernere Anwendung der Rechnung des Unendlichen auf die krummen Linien.

Da die folgenden Sätze blos Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Lehren sind, so werde ich sie dem eigenen Nachdenken des Anfängers überlassen und weniges nur zu ihrer Erläuterung beifügen.

§. 505.

Zu I.

das ist zwischen $\frac{1}{2}$ CM.MS und ꝛc. ꝛc. welches des Kreisausschnitts MCS Inhalt ist; und durchschnitte ein Bogen mit dem Halbmesser CN beschrieben die verlängerte CM in einem Punkt, den ich n nennen will, so wäre des Ausschnitts CNn Inhalt $= \frac{1}{2}$ CN.Nn, aber CM: MS $=$ CN; Nn, also $Nn = \frac{CN}{CM}.MS$ und der genannte Inhalt $= \frac{1}{2} CN . \frac{CN}{CM} . MS = \frac{CN^2}{2.CM} . MS$; jenen

nen von diesem abgezogen, läßt $\left(\frac{CN^2}{2.CM} - \frac{CM}{2}\right).MS = \frac{CN^2 - CM^2}{2CM}.MS$; aber $CN^2 - CM^2 = (CN + CM).(CN - CM) = (CM + NS + CM).NS = (2CM + NS).NS$ also der genannte Unterschied der beiden Kreisausschnitte, zwischen die der Ausschnitt MCN allemal fallen muß, $=$

$$\frac{NS.(2CM + NS)}{2CM}.MS$$

also ist das gesuchte Differential ꝛc. ꝛc. Daraus nämlich, daß der Unterschied zwischen den beiden Kreisausschnitten gegen dem kleinsten von diesen verschwindet, folgt, daß auch der Unterschied zwischen dem Ausschnitt MCN und MNS gegen MNS verschwinden müsse, wenn MS unendlich klein wird d. i. wenn man statt MS, dMS setzt, so sind die zugehörigen Ausschnitte MCS und MCN einander gleich; dadurch aber verwandelt sich Ausschn. MCN in dMCN, und Ausschn. MCS oder $\frac{1}{2}$CM.MS in $\frac{1}{2}$CM.dMS $=$ $\frac{1}{2}$ydMS, also hat man dMCN $=$ $\frac{1}{2}$y.dMS, aber y : dMS $=$ r : dx, mithin

$$dMS = \frac{y.dx}{r},$$

wo die Stücke auf dem Kreis AP, x; und der zugehörige Halbmesser CP, r heißt; das giebt nun

$$dMCN = \frac{y^2 dx}{2r}$$

§. 506.

§. 506.

Demnach sind für einerlei r die Flächen der archimedischen ersten Spirallinie, des Kreises und der Cycloide (Erl. der Alg. 610.) in einer stetigen Verhältnis.

§. 510.

Ueberhaupt heissen **Spirallinien** solche, deren Abscissen auf der Peripherie eines Kreises und Ordinaten aus dieses Kreises Mittelpunkte genommen werden. Nachdem nun die Gleichung zwischen x und y übrigens beschaffen ist, erhält man auch andere und andere Arten von Spirallinien. Soll sich z. B. x zu y wie des Kreises Umfang zum Halbmesser verhalten, so ist die Spirallinie die **archimedische** (506.) Ist die Gleichung zwischen x und parabolisch, so heißt die Sp. die **parabolische**; ist sie hyperbolisch wie (212.) so hat man die **Hyperbolische**, und auf eben die Art hat man die **logarithmische** Spirallinie, wenn ihre Gleichung logarithmisch ist, oder die Abscissen sich wie die Logarithmen der Ordinaten verhalten, da nämlich für $r = 1$, $x = m l y$ ist. (II.) Die Winkelgeschwindigkeit also, mit der ein Körper eine Spirale um einen gewissen Mittelpunkt beschreibt, verhält sich allemal wie die Logarithmen der Geschwindigkeit, mit der er sich vom Mittelpunkt entfernt. Aus III. ist klar, daß sich die log. Sp. unzählichemal um den Mittelpunkt c (hier fig. 35.) wenden müsse; aber jede Umwendung näher nach dem Mittelpunkte zu wird immer kleiner, so daß von jedem gegebenen Punkte der Spirale die Summe aller der unzähli-

chen Umwendungen bis an den Mittelpunkt, der Summe einer unendlichen Reihe geometriſch abnehmender Brüchen gleicht, deren Summe ſich allemal durch einen endlichen Ausdruck angeben läßt (IIII.) Eigentlich iſt der Mittelpunkt ein unendlich kleiner Kreis und daher hier als die Aſymptote der logar. Spirale anzuſehen, die immer um ihn herumgeht, und ſich ihm ſolchergeſtalt immer nähert, bis er ihn **im Unendlichen** erreicht.

Ein Körper, der eine gewiſſe Geſchwindigkeit nach einer gewiſſen Richtung erhalten hat, von dieſer Richtung aber ab und nach einem gewiſſen Mittelpunkt zugezogen wird, ſo daß er eine Geſchwindigkeit erhält, die der Nähe proportional iſt; ein ſolcher Körper bewegt ſich, wie die höhere Mechanik lehrt (§. 258.), in einer logarithmiſchen Spirale, und nähert ſich alſo dem anziehenden Punct immer ſchneller, je näher er ihm kommt; **aber nicht ohne Aufhören**, welches wegen der beſtimmten Länge der zu durchlaufenden Linie (IIII.) nicht ſein könnte. Die Geſchwindigkeit des Körpers wird nämlich bald **unendlich groß**, und mit dieſer **unendlichen** Geſchwindigkeit gelangt er in C; das ſtimmt auch mit höher. Mech. §. 258. III. am E. und daſ. 259. und 90. überein.

Zu I.

ſo ſetze man ſeine Tangente ꝛc. ꝛc. oder im

Ausdruck für ſeine Tangente CT, die $= \frac{y^2 dx}{r dy}$,

ſetze

setze man $\frac{y\,dx}{r\,dy} = m$. Weil nämlich CMT unveränderlich ist, und MCT allemal $= R$, so ist die Verhältnis der Seiten im $\triangle$ MCT unveränderlich, folglich für jedes y die Verhältnis tang CMT : CM dieselbige d. i. $\frac{y^2\,dx}{r\,dy} : y$ oder $\frac{y\,dx}{r\,dy}$ ist eine unveränderliche Grösse.

Zu IIII.

Wendete man 509. auf die archimedische Spirale an, so erhielte man folgendes. $y = \frac{rx}{P}$, also $dy = \frac{r}{P}\,dx$; das in die Gleichung $ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2\,dx^2}{r^2}\right)}$ gesetzt, giebt hier $ds = \sqrt{\left(\frac{r^2}{P^2}.dx^2 + \frac{r^2x^2}{P^2}.\frac{dx^2}{r^2}\right)} = \frac{r}{P}\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)}.dx$; dieß mit der Formel $x^m(a + bx^n)^p.dx$ verglichen, giebt $m = 0$, $a = 1$, $\frac{1}{r^2} = b$, $2 = n$, $2 = \nu$ und $1 = \mu$, also I.) $n = \nu$ II.) $\frac{m + 1 + \mu}{n} = \frac{2}{2}$ eine ganze Zahl, wie nach (399. III. V.) erfodert wird; mithin läßt sich die archimedische Spirale durch eine endliche Reihe rectificiren, weil sich 399.

III. das Integral von $\left(1 \pm \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} . dx$ durch eine endliche Reihe angeben läßt; aber dieſe endliche Reihe enthält den Bogen von einer Tangente, und da jeder trigonometriſchen Linie unzählich viele Bogen zugehören, ſo zeigt dieſes, daß die Rectification der Spirale die unbeſtimmte Quadratur des Kreiſes vorausſetzt (Alg. 622.) Einzelne Stücke der Spirale würden ſich indeſſen doch durch das nur erwähnte tranſcendentiſche Integral rectificiren laſſen, wenn man die beſtimmte Quadratur des Kreiſes dabei vorausſetzt. Es gehören nämlich zu eben dem x d. i. zu einem x, das die Figur unſern Sinnen nur einmal wirklich darſtellt, unendlich viele Bögen oder Stücke der Spirale. Wäre z. B. x der Bogen, der das Maas des Winkels A C M (24. fig.) iſt, ſo rühren von dieſem x alle dieſe Bögen in der Spirale her

CM, A 2 M, 2 A 3 M, 3 A 4 M, 4 A 5 M, (n — 1) A n M

Eigentlich ſind es Stücke, die von dem Ueberſchuß über o, p, 2p ꝛc. in den Ausdrücken

o ± x, p ± x, 2p ± x - - - -

herrühren; daher das Integral von $\left(1 \pm \frac{x^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} . dx$ auch alle die Bögen C M, A 2 M, 2 A 3 M ꝛc. giebt. Nennt man aber in dem tranſcendentiſchen Integral (397. XI.) den kleinſten Bogen, dem die dortige Tangente zugehört, A, ſo ergeben ſich da die unzählichen

lichen Werthe des Integrals, wenn man darinn statt Arc nach und nach diese Werthe setzt, wo $\pi = \frac{1}{2}P$ ist,

$$\odot \pm A, \pi \pm A, 2\pi \pm A \text{ - - - -}$$

und daraus schliese ich, daß diese Werthe von Arc. im Integral und die Bögen der Spirale einander so zugehören

Arc =	A	A ± π	A ± 2π	A ± 3π	- - A ± (n − 1)π
das Stück	CM	A 2M	2A 3M	3A 4M	- - (n − 1)A nM

fig 24.

Von der Krümmung.

§. 520.

Hiermit vergleiche man Erl. der Alg. von der Methode des Gr. u. Kl. no. 7.

Zu III. - VI.

Schon aus Erl. der Alg. a. a. O. no. 8. erhellt, daß die Erfindung der Wendungspunkte mit der Erfindung der Rückkehrpunkte auf einerlei Gründen beruht; hier wird solches bestätigt, wenn man 532. III. damit vergleicht; auch findet man aus Vergl. mit 155. IIII. u. 161. am E. eine Aehnlichkeit dieses Verfahrens mit der Erfindung des Gr. u. Kl.

Zu IIII.

Es kann aber auch Fälle geben, wo man beide Voraussetzungen $dp = o$ und $p = \infty$ zugleich gebrauchen kann. s. die Erl. 532.

§. 532.

Man könnte hier die Conchoide zum Exempel nehmen. Aus Anal. endl. Gr. 477. u. f. kennt man ihre Gestalt, und weiß also schon, daß sie Wendungspunkte hat. Nun ist a. a. O. 481.

$$y = \frac{(b \pm x).(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$= \left(\frac{b}{x} \pm 1\right).(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{also } dy = \left(\frac{b}{x} \pm 1\right).(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-x.)dx$$

$$\pm (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.(-bx^{-2}.dx) = \frac{-(x \pm b)}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}dx$$

$$-\frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}dx$$

und ☿)

$$p = \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{b \pm x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \pm \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}\right)$$

Dieß aufs neue differentiirt, giebt

$$dp = -d(b \pm x).(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \pm db\sqrt{(a^2 - x^2)}.x^{-2}$$

$$= (b \pm x).-(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}x.dx -$$

$$(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.dx \pm bx^{-2}.(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.xdx$$

$$-2b.\sqrt{(a^2 - x^2)}.x^{-3}.dx$$

=

$$= \frac{-(bx + x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx - \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} \cdot dx$$

$$+ \frac{b}{x \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}} dx - \frac{2b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^3} dx,$$

folglich $\frac{dp}{dx} = -\left(\frac{bx + x^2}{(a^2 - x^2)^{3:2}} + \frac{x - b}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}} + \frac{2b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^3} \right)$

und dieß $= o$ gesetzt, giebt für den Werth von x; dessen Ordinate durch den Wendungspunkt geht,

$$\frac{bx + x^2}{(a^2 - x^2)^{3:2}} + \frac{x - b}{x\sqrt{(a^2 - x^2)}} + \frac{2b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^3} = o$$

oder mit $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ multiplicirt giebt

$$\frac{bx + x^2}{a^2 - x^2} + \frac{x - b}{x} + \frac{2b(a^2 - x^2)}{x^3} = o$$

oder

$$\frac{(bx + x^2) \cdot x^3}{a^2 - x^2} + (x - b) \cdot x^2 + 2b \cdot (a^2 - x^2) = o$$

also auch

$$(b + x) \cdot x^4 + (a^2 - x^2) \cdot (x - b) \cdot x^2 + 2b \cdot (a^2 - x^2)^2 = o$$

das giebt

$$\left.\begin{matrix} x^5 + b \\ -x^5 + b \\ + 2b \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^4 + a^2 x^3 - a^2 b \\ -4a^2 b \end{matrix}\right\} x^2 + 2a^4 b = o$$

oder

oder endlich

$$4bx^4 \pm a^2x^3 - 5a^2b.x^2 \pm 2a^4b = 0 \quad (\hbar)$$

wo man also dieser Gleichung Wurzeln suchen müßte. Setzt man $b = a = 1$, so verwandelt sie sich in

$$x^4 \pm \tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{5}{4}x^2 \pm 0.x^1 \pm \tfrac{1}{2}a^4b = 0$$

Diese Gleichung hat wegen ihrer zwo Folgen zwo verneinte Wurzeln. Zur Probe nehme man $x = -1$, das giebt

$$1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} \pm \tfrac{1}{2} = 0$$

also ist -1 eine Wurzel der Gleichung; ausserdem kann es, wie die Betrachtung der Figur zeigt, nur noch eine bejahte Wurzel geben, die beiden übrigen werden unmöglich. Die Gleichung ($\hbar$) ist auch die für die Rückkehrpunkte (532. III.) und $x = -1$ giebt in der That, wie die Gestalt der Linie zeigt, keinen Wendungs- sondern einen Rückkehrpunkt, für $b = a$. Die Wurzel $x = -a$ giebt auch in ($\mathfrak{H}$) $a^2 - x^2 = 0$, also $p = \infty$, welches mit 520. IIII. übereinstimmt. Zugleich ist hieraus klar, daß es Fälle giebt, wo beide Voraussetzungen $dp = 0$ und $p = \infty$ ebendas geben.

Eigentlich ist jeder Rückkehrpunkt wie b (fig. 4.) zugleich ein Wendungspunkt. Nach dem Gesetz der Stetigkeit krümmt sich nämlich der Schenkel ab oben bei b herum nach c zu, und man muß sich also die beiden Schenkel ab, bc, bei b durch einen unendlich kleinen hohlen Bogen mit einander verbunden gedenken; also verändern die Schenkel ab, cb

ihre erhabene Krümmung bei b in eine hohle, und b ist also ein Wendungspunkt, eigentlich die Stelle, wo zwo Wendungspunkte zusammenfallen. Eine kleine Ueberlegung zeigt, daß der hohle Bogen bei b stärker gekrümmt sein muß, als der Kreisbogen von irgend einem Halbmesser, so klein man auch den Halbm. nähme; man müßte nämlich um den Krümmungskreis bei b zu erhalten, da einen Kreisbogen durchziehen, dessen Tangente an b zugleich die Tangente an ab, cb, wäre; und das erfodert einen Halbmesser, der kleiner als jede angebliche Grösse wäre d. i. der Halbmesser der Krümmung für den Punkt b ist = o.

Daraus giebt sich ein Mittel, Wendungs- und Rückkehrpunkte blos durch Rechnung von einander zu unterscheiden. Man suche nämlich für den Punkt der krummen Linie, der ein W. oder R. sein soll, den Halbmesser der Krümmung (543.), wird dieser = o, so ist der erwähnte Punkt ein Rückkehrpunkt.

Vom Krümmungskreis.

§. 538.

s. die Erl. der Alg. 477. u. 504.

§. 543.

Zu IIII.

Es ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ also für ein unveränderliches ds, wo $dds = o$,

d √

$$d\sqrt{(dx^2 \pm dy^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

$$\tfrac{1}{2}(dx^2 \pm dy^2)^{-\frac{1}{2}} . d(dx^2 \pm dy^2) = 0$$

oder

$$dx\,ddx \pm dy\,ddy = 0;$$

Zu XIII.

Aus der Natur des Kreises ist nämlich CP : PM = PM : PO, wenn CO den Durchmesser bedeutet, also

$$PO = \frac{PM^2}{CO}$$

§. 547.

Wegen des Halbmessers der Krümmung am Scheitel s. die Erl. der Alg. 504.

Für den Halbmesser der Krümmung am Scheitel der Conchoide erhielte man hier folgendes. Aus Erl. 832. folgt

$$\frac{-dx}{dp} = \frac{1}{\frac{bx \pm x^2}{(a^2-x^2)^{3:2}} \pm \frac{x-b}{x\sqrt{(a^2-x^2)}} \pm \frac{2b\sqrt{(a^2-x^2)}}{x^3}}$$

Für $x = a$ verschwinden hier im Nenner die niedrigern Ordnungen des Unendlichen gegen den höhern, und es wird

$$-\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{ba \pm a^2}{(a^2-a^2)^{3:2}}} = \frac{1}{\frac{ba \pm a^2}{(a \pm a)^{3:2}.(a-a)^{3:2}}}$$

$$=$$

$$= \frac{1}{\frac{ba \mp a^2}{(2a)^{3:2}} \cdot \left(\frac{1}{a-a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2a)^{\frac{3}{2}}}{a.(b \mp a).\infty^{\frac{3}{2}}}$$

Ferner $p = -\frac{b \mp a}{\sqrt{(a^2-a^2)}}$, also $p^2 = \frac{(b \mp a)^2}{(a \mp a).(a-a)}$

$$= \frac{(b \mp a)^2}{2a} \cdot \frac{1}{(a-a)} = \frac{(b \mp a)^2}{2a} \cdot \infty, \text{ und } (1 \mp p^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= (p^2)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{(b \mp a)^2}{2a} \cdot \infty\right)^{\frac{3}{2}}; \text{ und } Z =$$

$$\frac{(2a)^{\frac{3}{2}}}{a.(a \mp b).\infty^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{(a \mp b)^2}{2a}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \infty^{\frac{3}{2}} = \frac{(a \mp b)^3}{a.(a \mp b)}$$

$= \frac{(a \mp b)^2}{a}$. Für $a = b$, würde also der Halbmesser der Krümmung $= \frac{4a^2}{a} = 4a$; für $x =$

$-a$, wird, wenn $b = a$ ist,

$$z = \frac{(-a \mp b)^2}{-a} = \frac{(-a \mp a)^2}{-a} = 0$$

also ist der dem $x = -a$ für $b = a$ zugehörige Punkt der Conchoide ein Rückkehrpunkt. (Erl. 532. am E.)

Die gefundene Gleichung für z

$$z = \frac{(a \mp b)^2}{a}$$

zeigt,

zeigt, daß bei geometrischen Untersuchungen philosophische Schlüsse mit einer ganz besondern Behutsamkeit angebracht werden müssen, wenn man der Gefahr zu irren dabei nicht ausgesetzt sein will, ob ich gleich übrigens mit Hrn. Klügel (*) völlig einerlei Meinung bin. In den Erl. der Alg. 477. suchte ich einen Ausdruck für den Halbmesser der Krümmung an dem Scheitel der Conchoide ohne Rechnung durch ein bloses Raisonnement, und fandt

$$z = CA = a \mp b = \frac{(a \mp b)^2}{a \mp b}$$

Die Rechnung hier giebt aber $z = \frac{(a \mp b)^2}{a}$ also bedarf die dortige Erläuter. einige Erörterung. Der dortige Satz, (wo ich in der Figur statt a auch B setzen will, damit was von B gesagt wird auch von a zu verstehen ist) gründet sich darauf, daß BC : AC sich der Verhältnis der Gleichheit unendlich nähern soll. Nun könnte es in der Linie AC einen Punkt D, näher oder weiter als C von A, geben, so daß sich BD : AD der 1 : 1 näherte, je näher man B an A nähme, da das Gegentheil a. a. O. nicht ist erwiesen worden. Soviel weiß man aber aus der Lehre von den Verhältnissen, daß a. a. O. BC : AC der 1 näher kommt, als bC : EC, und daß die Verhältnis BC : AC der Bb : AE desto näher kommt, je kleiner $\frac{EC}{AC}$ d. i. je kleiner b gegen a ist; aber Bb :

AE

(*) anal. Trigon. S. 104.

AE ist das Verhältnis der Gleichheit, also nähert sich $\frac{BC}{AC}$ der 1 desto mehr, je kleiner $\frac{b}{a}$ wird; für ein sehr kleines $\frac{b}{a}$ würde man also (Alg. 477.) BC, CA, Ca als Grössen, die im Verhältnis der Gleichheit stünden, ansehen können; ein Kreis mit CA beschrieben würde also in dem Fall durch B, A, a gehen oder der Krümmungskreis, mithin AC der Halbmesser der Krümmung sein; also gilt das dortige (Alg. a. a. O.) eigentlich nur für unendlich kleine $\frac{b}{a}$. Dieß stimmt auch hier mit $z = \frac{(a + b)^2}{a}$ überein, wo z dem Werthe $a + b$ desto näher kommt, je kleiner $\frac{b}{a}$ wird. Wäre $a = 2$, $b = 3$, wie es ohngefähr a. a. O. ist, so wäre der Halbmesser der Krümmung $= \frac{(2 + 3)^2}{2} = 12\frac{1}{2}$ also $2\frac{1}{2}$ mal so groß, als nach Erl. der Alg. a. a. O. Für $b = 0$ verwandelt sich die Conchoide in einen Kreis für den Radius a, dessen Krümmungshalbmesser also $= \frac{(a + 0)^2}{a} = a$ oder sein eigener Halbmesser ist, wie sich gebühret.

Könnte man die Conchoide quadriren oder rectificiren, so liesse sich solches auch bei dem Kreise thun, weil man für solchen nur $b = 0$ setzen dürfte. Beide

Quadraturen hängen nämlich so zusammen. Es ist hier

$$\int y\,dx = \int \frac{(b \pm x) \cdot (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot dx$$

$$= \int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx \pm b \cdot \int x^{-1} (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx \quad (\pm$$

Der zweete Theil dieses Integrals läßt sich durch eine endliche Reihe finden; es ist nämlich (399. II. Erl.)

dort	m	a	b	n	p
hier	-1	a^2	-1	2	$\frac{1}{2}$

also $\frac{m \pm 1}{n} = 0$, welches das gegebene Differential in

$$\frac{Z^{\frac{1}{2}} \cdot dz}{2 \cdot (Z - a^2)}$$

verwandelt; und weil man hier blos den zweitheilichten Faktor hat, so ist sein Integral blos logarithmisch und nicht transcendentisch. Der erste Theil des Integrals in $\pm$ nämlich $\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$ betrift die Quadratur des Kreises, die man aus den obigen Lehren hier voraussetzen kann.

Beschreibt man also (fig. 5.) mit $cA = a$ den Quadranten $A\beta d$, so giebt der erste Theil des Integrals für jede Abscisse $c\alpha$ das Kreisstück $c\alpha\beta d$, der zweite das unendlich lange Stück $\delta\gamma\beta ds$ durch Logarithmen.

Man

Man könnte auch das erste Integral, nämlich das für den Kreis $\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ nach (399. III.) durch eine endliche Reihe angeben; es wäre nämlich $\mu = 1$, $\nu = n = 2$, $m = 0$, also $\frac{m + 1}{n} + \frac{\mu}{\nu} = 1$ eine ganze Zahl, und die Formel $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ verwandelt sich, in die nur genannten Werthe und a^2 statt a, -1 statt b a. a. O. substituirt, in nachstehende

$$\int \frac{-2a^2 z^2 . dz}{2(z^2 + 1)^2} = a^2 \int \frac{z^2 . dz}{(1 + z^2)^2} \quad (\hbar$$

wo sich das Integral zwar durch eine endliche Reihe, aber transcendentisch giebt. Ich schliese aber hier wie Erl. 510. IIII.

Heißt nämlich der kleinste Bogen, der zur Abscisse x im Kreis gehört c, so giebt das Integral $\hbar$ alle die unzählichen Räume, die zu c, p + c, 2p + c, ꝛc. gehören; hat nun ferner A die a. a. O. genannte Bedeutung, so rühren die verschiedenen Werthe des Integrals $\hbar$ von den Werthen

$$0 + A, \pi + A, 2\pi + A \text{ ꝛc.}$$

her, und die Kreisstücke und Werthe von Arc im Integral werden einander so zugehören

Arc = A	A + π	A + 2π	A + 3π	...
Kreisstück für c	c + p	c + 2p	c + 3p	...

Solchergeſtalt wird alſo das tranſcendentiſche Integral wieder algebraiſch, und das Integral von $\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$ hängt alſo nicht mehr von der **unbeſtimmten** Quadratur des Kreiſes ab. Weil man aber bei dieſer Integration doch A haben müßte, ſo ſetzt ſie ſchon die Quadratur des Kreiſes, die **beſtimmte** nämlich, voraus, alſo giebt 399. III. kein Mittel, die Differentialformel $\sqrt{(a^2 - x^2)}\,dx$ zu integriren.

Die Cubatur des Sphäroids dieſer Linie, das durch die Umwälzung um c A entſteht, iſt ſehr leicht und giebt ſich durch eine endliche ziemlich bequeme Reihe; nur muß man entweder $a - x$ ſtatt x ſetzen, da dann die im Integral vorkommende x von A aus zu verſtehen ſind, oder man muß dergleichen Betrachtungen wie 211. anſtellen. Das conchoidiſche Sphäroid aber, das durch die Umwälzung um die Aſymptote entſteht, und wovon ſich eben bei Viſirung der Fäſſer (Erl. der Alg. 477.) ein Gebrauch machen lieſſe, läßt ſich nicht ſo leicht, obgleich einfacher, cubiren.

Man müßte nämlich, um die Gleichung für Coordinaten auf der Aſymptote zu erhalten, Alg. 479. x und y mit einander verwechſeln; daraus gäbe ſich

$$y^4 \mp 2by^3 \mp x^2y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$
$$\mp b^2$$
$$- a^2$$

Daraus müßte man den Werth von x, und dann, wie ich Erl. der Alg. 349. gewieſen habe, um das

zu

zu y gehörige sphäroidische Stück zu cubiren, das Integral

$$3,14 . \int y^2 dx$$

suchen. Nun hat man Alg. 481.

$$x = \frac{(b + y) . \sqrt{(a^2 - y^2)}}{y}$$

also

$$dx = \frac{-(b + y)}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} dy - \frac{b\sqrt{(a^2 - y^2)}}{y^2} dy$$

also ist die gesuchte Cubatur

$$3,14 \left(\int \frac{-(by^2 + y^3) . dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} - \int b\sqrt{(a^2 - y^2)} . dy \right)$$

wo man folgende Integrale zu suchen hat

$$1.)\ b \int \frac{-y^2 dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$$

man setze $a = 1$, so hat man dieß Integral

$$= -b . \left(\frac{y\sqrt{(1 - y^2)}}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{B} \sin y \right) \text{(402. III.)}$$

$$2.)\ \int \frac{-y^3 . dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} =$$

$$- \frac{\sqrt{(a^2 - y^2)} . (-y^2 - 2a^2) + 2a^3}{3}$$

oder für $a = 1$

$$= \frac{-2 + (y^2 + 2) . \sqrt{(1 - y^2)}}{3}$$

$$3.)\ -\,b\int\frac{a^2\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}=-\,b.\mathfrak{B}\sin y$$

für $a=1$ (402. III.)

$$4.)\ +b\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$$ iſt dem no. 1. entgegengeſetzt; alſo heben dieſe beide einander auf, und es wird

$$3,14.\int y^2\,dx=\text{Conſt}+$$

$$3,14.\left(\frac{2+(y^2+2).\sqrt{(1-y^2)}}{3}-b.\mathfrak{B}\sin y\right)$$

Für $x=0$, alſo $y=a=1$ iſt das ſphäroidiſche Stück $=0$, alſo wird

$$\text{Conſt}=\left(b.\mathfrak{B}\sin 1+\frac{2-(1+2).\sqrt{(1-1)}}{3}\right)3,14$$

$$=3,14.(b.\mathfrak{B}\sin 1+\tfrac{2}{3})$$

alſo das ganze geſuchte Integral $=$

$$3,14.\left(\frac{-(2+y^2).\sqrt{(1-y^2)}}{3}\right.$$

$$\left.+b\,(\mathfrak{B}\sin 1-\mathfrak{B}\sin y)\right)$$

Heißt der kleinſte zu $\sin y$ gehörige Bogen A, ſo ſind die Werthe von $\mathfrak{B}\sin 1-\mathfrak{B}\sin y$ dieſe, wo $\pi=180°$ iſt,

$$90°-A;\ (90°+2\pi)-(A+2\pi);\ (90°+4\pi)-(A+4\pi);\ \text{ꝛc.}$$

jeder

jeder dieser Werthe ist $= 90° - A$, also für jedes y die Cubatur des sphäroidischen Stücks

$$\text{✠}) \quad 3,14 \cdot \left(\frac{(2 + y^2) \cdot \sqrt{(1 - y^2)}}{3} + b \cdot (90° - A) \right)$$

wodurch also wieder wie (510. Erl. IIII.) das transcendentische Integral in ein algebraisches verwandelt worden, und woraus also der Gebrauch der sonst unnütz scheinenden transcendentischen Integralien zu ersehen ist. Die Formel zu prüfen, setze man $b = 0$ und $y = 0$; unter diesen beiden Voraussetzungen muß nämlich die Formel ✠ den Inhalt der halben Kugel geben; und sie giebt 3,14. $\frac{(2 + 0) \cdot \sqrt{(1 - 0)}}{3}$

$= \frac{2}{3} \cdot 3,14$ für den Halbmesser 1. welches mit dem Satz, daß die Halbkugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder ist, der mit ihr gleiche Höhe und Grundfläche hat, übereinstimmt.

Man sieht nämlich, daß die gefundene Formel nur das zwischen y und a gelegene sphäroidische Stück giebt; will man also das Stück des Sphär. das zwischen zwo gleichen y liegt, haben, so muß man das vorige doppelt nehmen. So erhält man also überhaupt für $y = 0$, wo auch $A = 0$ ist, das ganze unendlich lange conchoidische Sphäroid $=$

$$3,14\text{---} \cdot 2 \left(\tfrac{2}{3} + b \cdot 90° \right)$$

aber die Länge von $90° = \frac{3,14\text{---}}{2}$, also das genannte Sphäroid

$$= 3,14\text{---} \cdot 2\left(\tfrac{2}{3} \text{✠ } b \cdot \frac{3,14\text{---}}{2}\right)$$

$$= \frac{4 \cdot 3,14\text{---}}{3} \text{✠} (3,14\text{---})^2 \cdot b$$

In den Erl. der Alg. 477. hatte ich mir die Mühe nicht genommen, den Ausdruck für die Cubatur der Conchoide zu suchen, und weil die Linie selbst von der vierten Ordnung ist, so vermuthete ich einen für die Ausübung sehr unbrauchbaren Ausdruck; hier finde ich grade das Gegentheil; die Cubatur (☿) *ist* so einfach, und, zumal da man jedesmal die Länge des Bogens von 90° — A aus Hrn. Lamberts Zusätzen ꝛc. nehmen kann, zum Gebrauch so bequem, daß ich ihre Anwendung bei Visirung der Fässer der Lambertschen Rechnung vorziehe, da die Gestalt der Dauben der Krümmung der Cissoidenlinie gewiß näher kommt, als der Kreislinie. Auch kann man x, y und a bei jedem Faß gehörig messen, und daraus findet sich

$$b = \frac{x\,y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} - y$$

es ist nämlich Nn (fig. 6.), oder die Linie durch die Mitte der beiden Faßböden, die Asympt. von MAm, Pdp; und die halbe Faßdicke beim Spunden $Ac = a = 1$; setzt man ferner die halbe Faßlänge $cn = \lambda$, und die halbe Breite des Bodens $mn = \beta$, so sind λ, β ein Paar Coordinaten, und

$$b = \frac{\lambda\,\beta}{\sqrt{(1 - \beta^2)}} - \beta,$$ und so findet man aus

der

der Länge des Fasses und seiner größten und kleinsten Dicke, die zu beiden Seiten von A d gelegenen Faßhälften d. i. den Inhalt des ganzen Fasses =

$$3,14\text{---}.2\left(\frac{(2+\beta^2).\sqrt{(1-\beta^2)}}{3}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda\beta}{\sqrt{(1-\beta)^2}}-\beta\right).(90^\circ-A)\right)$$

wo A der kleinste Bogen ist, dessen sin $= \beta$; wäre z. B. $\beta = \frac{1}{2}$, für a $= 1$, so wäre der kleinste Bogen, dessen sin $= \frac{1}{2}$ ist, $30^\circ = A$, dessen Länge man bei Hrn. Lamb. a. a. O. findet. Man kann aber den Ausdruck $90^\circ - A$ oder Bog sin $1 -$ Bog sin β auch so ausdrucken, daß man nicht nöthig hat, jedesmal erst die Länge des Bog sin β zu suchen. Es ist nämlich Bog sin $1 = \frac{1}{4}.3,141\text{---}$ und Bog sin $\beta = \frac{1}{4}.3,141.\beta$, also Bog sin $1 -$ Bog sin $\beta = 3,141\text{---}.\left(\frac{1-\beta}{4}\right)$, oder wenn man die Zahl $\pi = 3,14\text{---}$ durch 4. dividirt, so wird $90^\circ - A = 0,7853.(1-\beta)$ also des ganzen Fasses Inhalt =

$$3,141.2\left(\frac{(2+\beta^2).\sqrt{(1-\beta^2)}}{3}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)}}-\beta\right).0,7853.(1-\beta)\right)$$

Den Nutzen der Conchoide bei Verdoppelung des Würfels findet man in des de la Chapelle Abhandl.

von den Kegelſchn. S. 473. u. f. und ſollte ſich ihr Nutzen nicht auch bei Gewölbern, beſonders bei Brücken, äuſſern? Nur dürfte da die Krümmung nicht bis über der Conchoide ihren Wendungspunkt gehen, weil ſie über ſelbigem nicht mehr eigentlich gewölbt, ſondern eingebogen wäre; ich bemerke nur noch, daß bei dergleichen Gewölbern die Umwälzung der erſten Art, nämlich um die Linie a in Betrachtung käme —

ich bitte mir dieſe lange Anmerkung, die zugleich ein Beiſpiel zu 606. abgiebt, hier zu gut zu halten, die ich bei meinen Geſchäften gewiß gerne abgekürzt oder weggelaſſen haben würde, wenn ſie nicht verſchiedenes in den vorigen Erläuterungen theils zu berichtigen, theils aufzuklären diente.

§. 552.

Ich habe ſchon erinnert, daß für einen Rückkehrpunkt $z = o$ werden müſſe; alſo ſetze man den Werth von z, den die Gleichung für eine gegebene krumme Linie giebt, $= o$, und ſuche daraus x, das alsdann dem Rückkehrpunkt zugehört.

Im Ex. für die Parabel wäre

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{16} b ff} - \tfrac{1}{4} b$$

alſo ſtatt f, o geſetzt giebt

$$x = -\tfrac{1}{4} b$$

das giebt $y = \sqrt{-\tfrac{1}{4} b^2} = \tfrac{1}{2} b \sqrt{-1}$ welches unmöglich iſt, folglich hat die Parabel keinen Rückkehrpunkt; ſie hat nämlich überhaupt keine vielfache Punkte. Setzt man $f = \infty$, ſo giebt ſich die Abſciſſe

sisse, deren Ordinate entweder durch einen Wendungspunkt, oder durch einen solchen, wo die krumme Linie anfängt gerade zu werden, geht. Beide Fälle lassen sich aber leicht von einander unterscheiden. Für die Parabel erhielte man

$$x = \infty$$

Die Krümmung bei ihr nimmt nämlich mit jedem grössern x ab und verschwindet endlich für $x = \infty$ ganz oder geht da in einer geraden Linie der Axe gleichlaufend fort.

§. 557.

Zu I.

der doppelten Sehne ꝛc. ꝛc. Für den Kreis ist nämlich

$$y^2 = ax - x^2$$

$$\text{oder hier} = 2rx - x^2$$

$$\text{also } 2rx = y^2 \mp x^2$$

$$\text{also } z \text{ oder } 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)} = 2\sqrt{(4r^2 - (y^2 \mp x^2))}$$

oder wenn man die Sehnen LE, LF zieht, so wird $z = 2\sqrt{(EF^2 - LF^2)} = 2\sqrt{LE^2} = 2LE$.

§. 559.

Zu VI.

die Sehne für die Grundlinie ꝛc. ꝛc. sollte heissen: den Halbmesser für die Grundlinie angenommen, denn dadurch wird $ML = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

die

die Höhe, und der Inhalt $= \frac{1}{2} r . \frac{r . \sqrt{3}}{2} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$

§. 567.

Der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Krümmung eines Kreises ist, wie ich bei Erfindung des Halbmessers der Krümmung der Conchoide gewiesen habe, des gegebenen Kreises Mittelpunkt; also ist die Evolute eines Kreises der Mittelpunkt desselben, wo der Faden beim Anfang der Abwickelung schon die Länge des Halbmessers hat (569.) §. 574. wo die Rechnung ebendas giebt.

§. 570.

Nun ist 2c. 2c. Stellt man sich nämlich die CL verlängert vor, und daß solche von einem Perpendikel aus E in einem Punkt, den ich β nennen will, durchschnitten würde, so ist $\triangle EBO \sim \triangle C\beta E$, also

$$EO : EB = EC : C\beta$$
$$= EC : (CL \mp L\beta)$$
$$= EC : (CL \mp EB)$$

Nun ist auch $E\beta = BL$; das giebt

$$EO : OB = EC : BL$$

§. 571.

e ist hier die beständige Linie AF (569.)

§. 573.

und für $FA = \frac{1}{2} b$ 2c. 2c. weil nämlich D der Scheitel der Parabel und FA der Halbmesser der Krümmung an D ist.

§. 577.

§. 577.

1.) Wenn AM (fig. 7.) die krumme Linie ist, welche aus der Abwickelung des Kreises entsteht; so sei $AC = r$, $ACB = \mu$, also der Bogen $AB = r\mu = BM$, zugleich BM in M auf die krumme Linie senkrecht.

2.) Wenn $CM = y$, so ist $y^2 = r^2 + r^2\mu^2$, also $y = r\sqrt{(1+\mu^2)}$

3.) $\sin MCB = \frac{MB}{CM} = \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$;

$$\text{Cof } MCB = \frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

4.) Es sei $ACM = \varphi$, so ist $\sin\varphi = \frac{\sin\mu - \mu.\text{Cof}\,\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$

$$\text{Cof}\,\varphi = \frac{\sqrt{\left(\text{Cof}\,\mu^2.(1-\mu^2) + \mu.\sin 2\mu + \mu^2\right)}}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

5.) Wenn $1 : \pi$ die Verhältnis des Durchmessers zum Umfang, also $\pi = 180°$, so sei als ein Exempel bei (4.) $\mu = 90° = \frac{1}{2}\pi$; da ist

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{4}\pi^2)}}$$

Rectification.

6.) Wenn Mm ein Element ist, und bm bei m senkrecht, so ist $Mbm = BCb = d\mu$; also $Mm = bM.d\mu$, oder $ds = r\mu.d\mu$; daher AM oder $s = \frac{1}{2}r\mu^2$.

Qua-

Quadratur.

7.) $\Delta Mbm = \frac{Mm \cdot BM}{2} = \frac{r\mu \cdot d\mu \cdot r\mu}{2}$

$= \frac{r^2\mu^2 \cdot d\mu}{2}$, also die Fläche, die zwischen AM, AB und BM enthalten ist, $= \frac{r^2\mu^3}{6}$.

8.) Wenn der ganze Kreis abgewickelt ist, ist (5.) $\mu = 2\pi$, also die Länge der krummen Linie (6.) $2r\pi^2$; die Fläche (7.) $= \frac{4r^2\pi^3}{3}$.

Die Tangente.

9.) Diese ist auf BM senkrecht, also allemal mit CB parallel.

10.) Wenn (fig. 16.) MQ auf CA senkrecht ist, so ist $MQ = y \cdot \sin\varphi$, $CQ = y \cdot \mathrm{Cos}\varphi$, also (4.)

11.) $MQ = (\sin\mu - \mu \cdot \mathrm{Cos}\mu) \cdot r$; $CQ = r \cdot \sqrt{(\mathrm{Cos}\mu^2 \cdot (1-\mu^2) + \mu \cdot \sin 2\mu + \mu^2)}$ für rechtwinklichte Coordinaten.

12.) Eine endliche Gleichung zwischen CQ, MQ läßt sich nicht finden, weil man μ nicht wegschaffen kann.

Diese krumme Linie, welche aus der Abwickelung des Kreises entsteht, läßt sich auf folgende Art bei einem Schöpfrade gebrauchen.

1.) Aus

1.) Aus der Abwickelung des Kreises, der K zum Mittelpunkte, AK zum Halbmesser hat, sei die krumme Linie ABCD entstanden (fig. 8.)

2.) So daß wenn FG, HI, Tangenten des Kreises sind FG = dem Bogen AF; HI = dem Bogen AFH u. s. w.

3.) Und die Elemente der krummen Linie bei G, I, senkrecht auf FG, HI; daher den Halbmessern KF, KH parallel.

4.) Die letzte Stelle der Linie sei D, also AD dem ganzen Umfang gleich; bei D ist die krumme Linie senkrecht auf AD, und bei A senkrecht auf den Umfang des Kreises, wie aus ihrer Erzeugung erhellt. Also sind ihr erstes Element bei A und ihr letztes bei D einander parallel. Sie liegen aber auf entgegengesetzten Seiten der Linie AD.

5.) Man stelle sich die bisher beschriebene Figur in einer vertikalen Ebene vor, ziehe durch K die Horizontallinie LKM, und durch A die Vertikallinie ST, in der sich jetzo auch D befindet.

6.) Nun lasse man sich in dieser Ebene den Kreis mit seiner krummen Linie um seinen Mittelpunkt drehen. Die Linien LM, ST bleiben, wie leicht zu erachten, unbeweglich.

7.) Das Drehen geschehe so, daß D gegen AL zu oder linker Hand dessen, der die Figur betrachtet, steigt.

8.) So kommen nach und nach alle Punkte der krummen Linie in die vertikale ST, desto eher, je

näher

näher jeder dem letzten liegt, also wie sie auf der krummen Linie rückwärts vom Ende gegen den Anfang lage.

9.) Bei diesem Drehen nämlich nimmt der Winkel LKH ab, bis auf nichts; da fällt H auf die Stelle der Linie LM, auf die anfangs A fiel, folglich wird HI vertikal, und I fällt in eine Stelle der Linie ST unter LM aber näher dabei als D, weil HI kleiner ist als AD.

10.) Für Punkte, die bei der ersten Stellung (5.) über LM sind wie G, erhellt, daß beim Drehen der Winkel LKI immer wächst bis an 180° und drüber. Wenn er 360° geworden ist, so fällt I in die Stelle der Linie KE, wo zuerst A liegt, und G so tief unter LM in ST, als FG angiebt.

11.) Jedes Element der krummen Linie, das auf diese Art in ST unter LM kommt, ist daselbst nach (2.) horizontal, denn die ihm zugehörige Tangente des Kreises HI oder FG wird vertikal (10.)

12.) Seine Tiefe unter LM ist = HI (9.) also desto kleiner, je weiter das Element vom Ende D abliegt.

13.) Wenn man sich also drei an einander liegende Elemente vorstellt, die in der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, durch ST unter LM durchgehen, so geht 1. höher durch als D (9.) 2 höher als 1, und 3. höher als 2.

14.) Wenn eine krumme Linie von einer geraden berührt wird, so liegt wenigstens ein kleiner Bogen

gen

gen der krummen Linie, in dessen Nähe etwa sich der Berührungspunkt befindet, ganz auf einer Seite der Tangente.

15.) Wenn das Element bei I in der Vertikallinie also horizontal ist; so ist das, welches zunächst vor ihm durchgegangen ist, höher als I, folglich auch das, welches zunächst nach ihm durchgehen wird (14.) oder der Bogen um I herum ist höher als I.

16.) In dem nächsten Augenblicke, wenn I aus ST gestiegen ist, ist es höher als das Element, das sich nun in ST befindet.

17.) Es sei also eine Röhre, sie mag nun ganz oder nur ihre Hälfte gebraucht werden, nach der Gestalt dieser krummen Linie gebogen. Man lege bei D eine Kugel in sie, wenn sich alles in der ersten Stellung befindet (5.) Nun lasse man die Maschine sich drehen, wie (6; 7;), so wird die Kugel immer nach Stellen der Röhre, die vom Ende der Röhre niederwärts liegen, rollen (8; 12). Wann sie an den Anfang kommt, läßt sich so beurtheilen:

18.) Ich betrachte die Kugel blos, insoferne sie in der Röhre sinkt, ohne daran zu denken, ob sie dabei eine Geschwindigkeit bekommt, mit der sie weiter fortgehen kann, als aus dem Elemente der Röhre, wo sie jetzo ist, in das nächste.

19.) Indem sich also D aus der Vertikallinie aufwärts dreht, sinkt die Kugel aus dem letzten Elemente der Röhre in das nächstvorhergehende, das nun in ST kommt, und aus diesem wieder in das

nächstvorhergehende, das nach jenem in ST kommt (12.) u. s. w.

20.) Die Kugel bleibt also beständig in ST, nur steigt sie darin immer höher, weil jedes Element, das vom Ende der Röhre weiter rückwärts liegt, an einer höhern Stelle der Vertikallinie durchgeht, als das, welches zunächst vor ihm gegen das Ende zu lag, und zunächst vor ihm durchgieng (13.)

21.) Wenn D seinen Umlauf fast vollendet hat, und von der rechten Hand dessen, der die Figur ansieht, beinahe wieder unten in ST kommt, so gehen durch ST unter LM die Stellen der Röhre, die zunächst beim Umfang liegen, wie GA; und wenn D wieder in die Vertikallinie kommt, so ist der Anfang wieder in ihr, und steht horizontal, wie bei der allerersten Stellung. Dahin ist also die Kugel gesunken.

22.) Ist statt des Kreises eine hohle Welle, in welche sich die Röhre öfnet, so fällt die Kugel dahin ein, sowohl wegen der Bewegung, die sie hat, als auch, wenn sich D zur zwoten Umdrehung wieder aus der Vertikallinie erhebt.

23.) Ist der Kugel Gewicht = p, des Kreises Halbmesser KA = r, so ist der Kugel Moment = p.r, wo sie sich auch in der Vertikallinie befindet.

24.) Wenn $1 : \pi$ die Verhältnis des Durchmessers zum Umfang ist, so ist des gegenwärtigen Kreises Umfang = $2r\pi$ = AD.

25.) Um soviel wird die Kugel in der Zeit erhoben, da sich der Kreis einmal ganz herum dreht.

26.)

26.) Wenn man einen Faden um den Kreis wickelt, der 2, 3 u. s. w. mal so lang ist, als der Umfang, so erhält man nach vollendeter erster Abwickelung Fortsetzungen dieser krummen Linie, oder ihren 2ten, 3ten u. s. w. Theil. Das Ende jeden Theils ist in ebender Vertikallinie durch A, in welcher sich D befindet; das zweite um des Kreises doppelten, das dritte um des Kreises dreifachen Umfang u. s. w. unter A.

27.) Hätte man also den Canal nach dem ersten, zweiten, dritten --- Theile der krummen Linie gebildet, so ließe sich damit die Kugel auf eine Höhe erheben, die dem doppelten, dreifachen u. s. w. Umfange des Kreises gleich wäre.

28.) Aber doch wenn der erste Theil sich in D (fig. 9.), der zweite in △, der dritte in ∂ endigte, und die Kugel am Ende des dritten eingelegt würde, so durchliefe die Kugel bei der ersten, zwoten, dritten Umdrehung des Rades, den dritten, zweiten, ersten Theil, und befände sich in △, D, A, wenn die erste, zwote, dritte Umdrehung vollendet wäre.

29.) Jede Umdrehung des Rades erhübe also doch die Kugel um den Umfang des Kreises.

30.) Auf die bisherigen Begriffe gründet sich ein Schöpfrad, das de la Faye erfunden hat, und Mem. de l'Ac. des Sc. 1717. p. 67. ed. de Paris beschreibt; und nach ihm **Belidor** Arch. hydraul. 4. Part. Tome I. Livre II. Chap. 4. §. 779. auf der 9. Kupfertaf. zum 4. Cap.

31.) Das Ende der Röhre 17. ſteht in Waſſer, alſo tritt da Waſſer hinein, und ſteigt beim Umdrehen wie die vorhin beſchriebene Kugel, bis zum Anfang.

32.) Setzt man um die hohle Welle vier ſolche Röhren, deren Anfänge in A, a, A, a, (fig. 8.) um Quadranten von einander entfernt ſind, ſo ſchöpft jede ihr Waſſer, ein Viertheil der Umdrehung nach dem andern, und gießt es ebenſo aus, daß alſo, wenn die Maſchine einmal im Gange iſt, immerfort Waſſer ausgegoſſen und wieder geſchöpft wird. So iſt ſie bei den erwähnten Schriftſtellern vorgerichtet.

33.) Ihr Hauptvortheil iſt, daß das Waſſer, welches jedesmal, wenn das Ende der Röhre unten iſt, hineintritt, und beim Umdrehen gehoben wird, immer einerlei Moment hat (23.) alſo eine beſtändige Kraft, die zum Umdrehen der Maſchine angewandt wird, eine gleichförmige Bewegung hervorbringt.

34.) Die Maſchine wird von einem Rade getrieben, deſſen Halbmeſſer = AD. Wenn alſo p (23.) das Gewicht alles Waſſers bedeutet, das auf einmal in den vier Röhren (32.) iſt, und q die Kraft, die am Rade mit ihm im Gleichgewicht iſt, ſo iſt $AD.q = pr$, aber $AD = 2r\pi$, alſo $2\pi q = p$, oder $q = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{\pi}$, alſo $q = p \cdot 0,159154943$ (Geom. 44. S. 5. Zuſ.) $p = q.6,283185$.

35.)

35.) Als der Hauptmangel dieser Maschine wird angegeben, daß sie das Wasser nicht höher hebt, als der Umfang der hohlen Welle beträgt. Diesem ließe sich nach (27.) abhelfen; vielleicht aber würde dadurch die Maschine zu unbehülflich, ausser andern Unbequemlichkeiten, die noch entstehen könnten.

36.) Diese Maschine beruht also auf folgendem Satze: wenn die krumme Linie, die aus der Abwickelung des Kreises entsteht, an der Stelle, wo sie sich anfängt, gehörig wie sie durch die Abwickelung entsteht, an ihrem Kreise befestigt ist; wenn man sie in einer vertikalen Ebene so stellet, daß ihr Element beim Anfang horizontal ist, und durch diesen Punkt, wo es jetzo steht, eine Vertikallinie zieht, die den Kreis da berühren würde; so lasse man nun den Kreis sich um seinen Mittelpunkt drehen, da dreht sich die krumme Linie so, daß das Element von ihr, das in die genannte Vertikallinie kommt, allemal horizontal ist.

37.) Ebender Satz kommt auch bei den Däumlingen der Welle zu Puchstämpfen vor. Belidor a. a. O. §. 717. Kæstn. de figura pinnarum. Comment. nov. Soc. Sc. Gott. Tom. II.

38.) Nur ist da die krumme Linie so gestellt, daß sie beim Anfang ihre convexe Seite aufwärts kehrt, wie hier die hohle, welches sich nach der Absicht richtet, wozu sie jedesmal gebraucht wird. Man braucht auch derten nicht ihren ersten Theil ganz.

39.) Die bisherigen Sätze sind zugleich ein Beweis von dem Nutzen, den die Lehre von den Evo-

luten in der Ausübung gewährt, und aus der Urſache habe ich ſolche hier mit beigebracht; ich habe ſie übrigens ſchon vor einigen Jahren von Hrn. Hofr. Käſtnern mitgetheilt bekommen.

§. 605.

Dieſe krumme Linien ſind die ꝛc. ꝛc. man findet ſolches auch nebſt mehrern Anwendungen der bisherigen Lehren in des Hrn. Prof. Kies Dissert. mathematico-phyſica de trajectoriis planetarum & cometarum. Tubing. 1766. Da dieſe lehrreiche Abhandlung gewiß nur in ſehr wenigen Händen iſt, ſo will ich ſolche hier ganz einſchalten, welches Kennern hoffentlich nicht mißfallen wird.

I. Gleichwie ein Körper, der von einer einzigen Gewalt getrieben wird, immer in ebenderſelben geraden Linie fortgeht, ſo werden zu einer krummlinigten Bewegung wenigſtens zwo Kräfte erfodert, deren Richtungen einen gewiſſen Winkel mit einander machen. Um alſo die krummlinigte Bewegung näher kennen zu lernen, muß man dieſe Kräfte genauer unterſuchen, und ſehen, wie ſie ſich bei verſchiedenen krummen Linien äuſſern.

Es ſei (10. fig.) A b das Element der krummen Linie A b D, wodurch ſich ein Körper in einem unendlich kleinen Zeittheilchen bewege, ſo wird ſich dieſe Bewegung in jede zwo andere, welche man will, alſo auch in die durch A B und A a, wovon jene die zum Element A b gehörige Berührungslinie, dieſe aber die dazu gehörige Normale iſt. Die Kraft, welche

den

den Körper nach der Richtung der Tangente treibt, heißt die **Tangentialkraft**, die ihn aber nach der Normale ihrer Richtung treibt, die **Normalkraft**; und weil diese letztere den Körper immer nach einem Punkt, wie nach einem Centro, hintreibt, so nennt man sie auch die **Centripetalkraft**, die wir nun etwas näher betrachten wollen. Es sei also Ab = ds das Element der krummen Linie, welches der Körper, dessen Masse m sein mag, in dem unendlich kleinen Zeittheilchen dt durchlauft; und die Kraft, die ihn nach der Richtung AC treibt, = p; so wird ihn diese Kraft in dem Moment dt durch Aa treiben; es wird also, weil auch jede beschleunigte Bewegung in unendlich kleinen Zeittheilchen für gleichförmig angenommen werden kann, Aa = $\frac{dcdt}{r}$. s. Krafts Phys. P. I. §. 83. Da aber nach den allgemeinen Gesetzen der Bewegung dc = $\frac{npdt}{m}$, und dt = $\frac{ds}{c}$ wie sich aus §. 83. a. a. O. leicht herleiten läßt (*), so wird dc = $\frac{npds}{mc}$ und daher dcdt = $\frac{npds^2}{mc^2}$ = Aa. Und nun läßt sich die Kraft selbst, die den Körper nach dieser Bewegung getrieben hat, bestimmen. Man nehme im

(*) weil das hier von Hrn. Kies angeführte Buch nicht so allgemein ist, so verweise ich Anfänger auf Hrn. Hofrath Karstens Lehrbegr. der Mathem. IV. Th. §. 112. u. 113.

Schenkel der krummen Linie AbD ein unendlich kleines Theilchen Ab, und gedenke ſich den Umfang eines Kreiſes, wovon ein Theil = Ab und deſſen Krümmung mit der von Ab einerlei iſt, ſo heißt dieſes Kreiſes Halbmeſſer der Halbmeſſer der Krümmung bei Ab, und wenn ſolcher ſenkrecht auf die Tangente des Schenkels bei A genommen wird, ſo heißt er Radius oſculi. ſ. Segneri curſ. mathem. P. III. §. 564. & 566. Verlängert man alſo Aa, die auf der Tangente AB ſenkrecht iſt, und nimmt nun für dieſe krumme Linie eine andere Normale bC, ſo daß beide in einem gemeinſchaftlichen Mittelpunkt C zuſammenſtoſen, ſo ſind AC, bC Radii oſculi. Es ſei AC = bC = r, ſo wird, wenn man die beiden Dreiecke Aab und abC betrachtet, Aba + abC = R = abC + aCb, folglich Aba = aCb. Ferner ſind bei a rechte Winkel, und daher △ Aab ∽ △ abC; es wird alſo Aa:Ab = ab:bC, oder, wenn man AC ſtatt bC und Ab ſtatt ab ſetzt,

$$Aa : Ab = Ab : AC \text{ oder } \frac{npds^2}{mc^2} : ds = ds : r$$

mithin $rnpds^2 = mc^2 ds^2$ und $rnp = mc^2$.

Das giebt die geſuchte Kraft $p = \frac{mc^2}{nr}$, oder wenn man die Geſchwindigkeit durch die zugehörige Höhe, die v heiſſen ſoll, ausdruckt, ſo wird $c = \sqrt{v}$, $c^2 = v$ und weil $n = \frac{1}{2}$ (Kraft a. a. O. §. 150.)

$P = \frac{2mv}{r}$. Dieſe wollen wir N nennen.

II. Die

II. Die zwote Kraft, deren Richtung die Tangente anzeigt, läßt sich aus ebenden Gründen bestimmen; es ist nämlich wie vorhin $dc = \frac{npds}{mc}$

oder $mcdc = npds$, folglich $p = \frac{mcdc}{nds}$, und wenn gleichfalls $c = \sqrt{v}$ und $c^2 = v$, so wird $2cdc = dv$, oder $cdc = \frac{dv}{2}$, folglich, wenn $n = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, $p = \frac{2mdv}{2ds} = \frac{mdv}{ds}$. Wir wollen diese Kraft T nennen. Wenn wir nun Kräfte annehmen, die auf gleiche und ungleiche Massen auf einerlei Art wirken, oder wann wir Körper wie Punkte betrachten, so wird $N = \frac{2v}{r}$ und $T = \frac{dv}{ds}$.

Daraus erhellt zugleich, wie jede besonders die Bewegung des Körpers ändert. Denn es bewege sich der Körper durch der krummen Linie AMB Element $Mm = ds$, so wird durch Zerlegung dieser Bewegung in zwo andere Kräfte $Nr = 2v$, und $Tds = dv$.

III. Es beschleunige eine Kraft den Körper nach der Richtung MC (fig. 11.), man fragt, wie sich seine Bewegung ändern werde? Auf die Tangente MT lasse man aus C das Perpendikel $CT = p$, und $mr = dx$ sei auf $CM = y$ senkrecht, so läßt

ſich die erwähnte Kraft in die Normalkr. TC und die Tangentialkr. MT zerlegen, und es wird

$$T:P = MT:MC = dy:ds, \text{ wo } MR = dy \text{ und } Mm = ds$$

$$P:N = MC:CT = ds:dx = \frac{y}{P}$$

Hieraus die Werthe der Kräften N und T geſucht, giebt $T = \frac{P\,dy}{ds}$ und $N = \frac{P\,dx}{ds}$, und dieſe Werthe in dem Ausdruck §. II. gebraucht, giebt $2vds = Prdx$, und $dv = \pm P\,dy$, nachdem nämlich die Richtung der Kraft mit dem Element Mm einen ſpitzigen oder ſtumpfen Winkel macht. Aus dieſen beiden Gleichungen läßt ſich P weg ſchaffen und eine dritte machen; es wird nämlich aus der erſten $\frac{2vds}{rdx} = P$, aus der zwoten $P = \pm \frac{dv}{dy}$, folglich

$$\frac{2vds}{rdx} = \pm \frac{dv}{dy} \text{ oder } 2vdsdy = \pm rdxdv$$

und $\frac{dv}{v} = \pm \frac{2dsdy}{rdx}$; nun iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = \frac{ydy}{dp}$ und $\frac{ds}{dx} = \frac{y}{p}$, alſo, wenn man dieſe Werthe ſtatt r und $\frac{ds}{dx}$ gebraucht,

$$\frac{dv}{v} = \pm \frac{2dp}{p}, \text{ und die Integration giebt } lv =$$

$l\,Const \pm 2\,l\,p$, folglich $v = \frac{Const}{p^2}$. Es sei also die Geschwindigkeit des Körpers in $A = c$, und das Perpendikel aus C auf die Tangente der krummen Linie $AM = h$, so wird $v = c$ für $p = h$, und daher $v = \frac{ch^2}{p^2}$. Es wird also, wenn man statt v seinen Werth substituirt $P.p^2 r\,dx = 2ch^2 ds$ und nun statt $\frac{ds}{dx}$, $\frac{y}{p}$ setzt, $P = \frac{2ch^2 y}{p^3 r}$. Und nun können wir die Centripetalkr. bei verschiedenen krummen Linien betrachten, und einer jeden ihr allgemeines Gesetz untersuchen. **Kraft** hat solche a. a. O. §. 185. beim Kreise betrachtet, und die Gleichung $p = \frac{mo}{t^2}$ herausgebracht, wo nämlich o die Peripherie des Kreises, und t die periodische Zeit des Körpers bedeutet; und daraus hat er §. 198-209. verschiedenes von den Centralkräften hergeleitet. Unserer Absicht wird es angemessener sein, eben dergleichen Betrachtungen bei der Ellipse anzustellen.

IIII. Es beschreibe ein Körper um den Brennpunkt C die Ellipse AMB. Die grosse Axe sei AB, der Parameter $= L$, der Mittelpunkt G; $CP = x$, $PM = z$, $CM = y$, MT sei eine Tangente am Punkt M, das Perpendikel aus dem Brennpunkt C auf die Tangente $CT = p$; man sucht das Gesetz, das hier die Kraft P in dieser Bewegung beobachtet.

Es

Es erhellt, daß um aus einer gegebenen krummen Linie das Geſetz, wornach die Kraft wirket, ausfindig zu machen, man eine Gleichung zwiſchen p und y ſuchen müſſe; ſolches alſo für die Kegelſchnitte zu bewerkſtelligen, müßte man eine ſolche Gleichung aus der zwiſchen z und x herleiten. Weil ſich aber ſolches aus andern ſchon bekannten Eigenſchaften der Kegelſchnitte herleiten läßt, ſo hat man ein ſo weitläuftiges Verfahren nicht nöthig. Es ſei daher die Normale $MO = \omega$, der Rad. oſc. an $M = r$; ſo wird der Winkel $CMT + OMC = 90°$, alſo $\frac{CT}{CM} = \frac{MR}{MO}$, und weil $MR = \frac{1}{2} ML$ (ſ. Käſtn. höh. Mech. §. 238.) $\frac{CT}{CM} = \frac{L}{2MO}$, und daher $CT = \frac{L.CM}{2MO}$ oder, die obige Zeichen gebraucht, $p = \frac{Ly}{2\omega}$. Es ſei das Perpendikel CA aus C auf die Tangente in $A = h$, ſo wird aus dem vor. §. $P = \frac{ch^2y}{p^3r}$. Nun iſt aber der Rad. oſc. für Kegelſchnitte $r = \frac{4\omega^3}{L^2}$ (Anal. des Unendl. 547. daſ. x, L ſtatt z, b geſetzt.) und daher, weil $p = \frac{Ly}{2\omega}$,

$p^3 r$:

$p^3 r = \frac{L^3 y^3 4\omega^3}{L^2 8\omega^3} = \frac{Ly^3}{2}$, mithin $P = \frac{4ch^2y}{Ly^3} = \frac{4ch^2}{Ly^2}$; weil nun $y = CM$ die Entfernung des Körpers von der wirkenden Kraft vorstellt, so folgt, daß bei den Kegelschnitten die Stärke, womit die Kraft wirkt, sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Körpers von ihr verhält.

V. Die gefundene Verhältnis, wornach die Kraft gegen den Brennpunkt des Kegelschnitts wirket, ist mit der einerlei, die wir bei der Wirkung der Schwere auf Körper, die sich nahe bei unserer Erde befinden, bemerken, und die sich sogar bis an den Mond hin erstreckt, wie eine genaue Berechnung mit seiner wirklichen Bewegung verglichen ausweißt. s. Kraft a. a. O. p. 109. §. 157. Nehmen wir also an, daß die Planeten auf ebendie Art gegen die Sonne schwer seien, so wird man, wenn man sich selbige um eine gewisse Weite von der Sonne entfernt gedenkt, ihre Bewegung in Kegelschnitten aus den nur erwähnten Gründen der Mechanik herleiten und erklären können, und zugleich im Stande sein, alles dasjenige, was Keppler mit einem ungemeinen Scharfsinn aus Beobachtungen geschlossen hat, aus Naturgesetzen zu beweisen. Ehe wir aber zur nähern Bestimmung der Bahnen aus gewissen gegebenen Stücken schreiten, wollen wir erst noch verschiedenes von den Eigenschaften der zusammengesetzten Bewegung beibringen, das uns den Weg zum Folgenden bahnen wird.

VI. Ein

VI. Ein Körper beſchreibe, von irgend einer Gewalt getrieben, um einen gewiſſen Punkt C eine krumme Linie; ſo werden allemal die Flächen den Zeiten proportional ſein. Es ſeien AD, dD ꝛc. gleiche unendlich kleine Bögen, die ein Körper von zwo Kräften getrieben als Diagonalen von Parallelogrammen AD und Dd durchloffen hat, ſo daß er in dem erſten Zeittheilchen die Fläche ASD, im doppelten die Fl. ASD + DSd beſchrieben hat. Nun iſt aber ASD = DSE da ſie gleiche Grundlinie und Höhe haben; auſſerdem iſt DSE = DdS weil ſie zwiſchen Parallelen DS, Ed liegen und eine gemeinſchaftliche Grundlinie DS haben; demnach wird auch ASD = DdS, und es verhält ſich alſo die in der einfachen Zeit beſchriebene Fläche zu der in der doppelten beſchriebenen, wie ASD : 2ASD = 1 : 2 oder die Flächen ſind den Zeiten Proportional, und ebender Schluß gilt von allen übrigen unendlich kleinen Bögen.

VII. Hierdurch wird das eine von den beiden Kepplerischen Geſetzen erwieſen, vermöge deſſen ſich die Zeiten verhalten müſſen, wie die Ausſchnitte, die zwiſchen den Linien liegen, welche von dem Mittelpunkt (C) an die beide äuſſerſte Punkten der in dieſen Zeiten durchloffenen Bögen gezogen werden. Das zweite nicht weniger bemerkungswürdige Geſetz iſt das, vermöge deſſen man aus den periodiſchen Zeiten der Planeten die Verhältnis der groſſen Axen von den Ellipſen, welche die himmliſche Körper durchwandern, ſoll herleiten können. Es wird der Mühe werth ſein, auch dieſes näher zu unterſuchen.

Es

Es ist klar, daß des Körpers periodische Umlaufszeit T desto grösser sein müsse, je grösser die ganze elliptische Fläche, und je kleiner der in einer gegebenen Zeit vom Körper beschriebene Theil derselben ist. Setzt man also die ganze elliptische Fläche $= a$, und den Ausschnitt, den der Körper in einer gegebenen Zeit zurücklegt $= s$, so wird $T = \frac{a}{s}$. Nun verhalten sich aber die Ausschnitte wie die Quadratwurzeln aus den Parametern (s. de la Caille lect. astron. p. 82. §. 165. I.), und es ist daher, wenn der Parameter b heißt, s wie $\sqrt{b}$, T wie $\frac{a}{\sqrt{b}}$ und a wie $T.\sqrt{b}$ d. i. wenn mehrere Körper in Ellipsen bewegt werden, so verhalten sich die ganzen von ihnen umloffenen Flächen wie die Produkte aus der ganzen Umlaufszeit in die Quadratwurzel des zugehörigen Parameters. Und nun wollen wir auch die Verhältnis der periodischen Zeit eines jeden Planeten zu der grossen Axe suchen. Es sei die kleine Axe der Ellipse $= d$, die grosse $= c$, der Parameter $= b$, so wird $cb = d^2$ und $c^3 b = d^2 c^2$. Da sich nun die ganze elliptische Fläche wie das Rectangel aus beiden Axen verhält oder a wie cd wie $T\sqrt{b}$ ist, so wird, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, $c^2 d^2$ wie $T^2 b$ wie $c^3 b$ und daher T^2 wie c^3 oder T wie $\sqrt{c^3}$ (*) d. i. die periodische Zeit eines

(*) Ich habe statt des in der Urschrift befindlichen Zeichens $=$, das sich eigentlich nicht dahin schickt, hier überall

eines jeden Planeten verhält ſich wie die Quadratwurzel aus dem Würfel der groſſen Axe. Wodurch alſo auch das zweite Kepplerische Geſetz bekräftigt worden.

VIII. Die vorgetragenen Lehrſätze haben ihren Nutzen beſonders, wenn man die Bahnen ſelbſt aus gewiſſen gegebenen Stücken beſtimmen will. Wir wollen darinnen Hrn. **Eulers** Methode in ſeiner Theoria Mot. Planet. & Comet. folgen, wo dieſer groſſe Geometer dieſe Lehre unvergleichlich aus einander geſetzt und erweitert hat. Weil im Folgenden oft Flächen von krummen Linien vorkommen, ſo wird es nicht unnütz ſein, den Ausdruck für ein elliptiſches Segment zu ſuchen. Es ſei (13. Fig.) CDA die halbe Ellipſe, KENA aber ein Theil des Kreiſes, der $CK = CA = \frac{1}{2}a$ (wo a die groſſe Axe der Ellipſe bedeutet) zum Halbmeſſer hat; man ſucht das Differential des Segments DCPM? Für Abſciſſen aus dem Mittelpunkt iſt $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$ (Alg. §. 368.) alſo $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}\right)}$;

alſo das geſuchte Differential $= du\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}\right)}$

$= du\sqrt{\left(\frac{c^2a^2 - 4c^2u^2}{4a^2}\right)} = du.\frac{1}{2}c\sqrt{\left(1 - \frac{4u^2}{a^2}\right)}$.

Es

überall das Wort: wie, deſſen ſich auch Hr. Hofr. Käſtner in dergleichen Fällen zu bedienen pflegt, ſubſtituirt.

Es sei ferner ENCP das Segment des gedachten Kreises, so giebt die gefundene Formel, nur $c = a$ gesetzt, das Differential dieses Segments $= \frac{1}{2}a.du\sqrt{\left(1 - \frac{4u^2}{a^2}\right)}$; bezeichnet man also das Segment der Ellipse mit E, des Kreises mit C, so wird $dE = \frac{c}{a}dC$ also $E = \frac{c}{a}.C.$ Weil nun $C = \frac{1}{8}a^2.\mathfrak{B}\frac{\sin 2u}{a} + u\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - u^2}{2}\right)}$, so erhellt, daß die unbestimmte Quadratur der Ellipse von der unbestimmten des Kreises abhänge. Anal. des Un. S. 595.

IX. Wenn die Fläche und die Zeit, in der diese Fläche ist zurückgelegt worden, gegeben wird, den Parameter der krummen Linie zu finden. Vor allen Dingen muß man hier, um die verschiedene in der Aufgabe vorkommende Stücke mit einander vergleichen zu können, alles auf ein gemeinschaftliches Maas zu bringen suchen, das man nachher allemal beibehält. Man setze also die mittlere Weite der Sonne von der Erde $= 100000$, und bestimme nun alles nach dieser Einheit. Weil nun in der Aufgabe die Fläche als gegeben angenommen wird, so wollen wir setzen, sie sei nach Quadratmaase in solchen Theilen ausgedruckt, deren 100000 auf die halbe grosse Axe einer ganzen Bahn gehen. Die Fläche auf die gedachte Art ausgedruckt heisse A, und b sei die Ordinate aus dem Brennpunkt, welche die Hälfte des Parameters ist, den man auf ebendie

Art ausdrucken muß. Die Zeit drucke man in natürlichen Tagen mittlerer Zeit und in Decimaltheilen des Tages aus; sie sei $= T$, so werden A, b, T wie absolute Zahlen anzusehen sein. Aus (VII.) ist T wie $\frac{A}{\sqrt{b}}$, daher $\frac{A}{T.\sqrt{b}}$ eine beständige Grösse sein muß, die wir m nennen wollen; es ist also $m = \frac{A}{T\sqrt{b}}$ und $T = \frac{A}{m\sqrt{b}}$; $\sqrt{b} = \frac{A}{mT}$, und $b = \frac{A^2}{m^2 T^2}$ ein Ausdruck für den halben Parameter, worin alles bis auf m gegeben ist; m aber giebt sich, (wie in diesen Erläuter. schon mehrmalen bei Erfindung beständiger Grössen ist gewiesen worden) wenn man auf einen besondern schon bekannten Fall zurückgeht. Nun weiß man, daß die Umwälzung der Erde um die Sonne in $365^d\,6^h\,8'\,30''$ geschieht; man setze also $T = 365{,}256$; A sei die Fläche der Erdbahn und b der dieser Bahn zugehörige halbe Parameter, so giebt sich m durch den Bruch $\frac{A}{T\sqrt{b}}$. Es sei demnach der Erdbahn halbe grosse Axe $= 100000 = c$, so ist die Hälfte der kleinen $= \sqrt{b}\,c$; ferner bedeute 1 : P die Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis, wo also $P = 3{,}14159265$; so ist des Kreises, der c zum Halbmesser hat, Inhalt $= P\,c^2$, der sich zu der Fläche der Erdbahn verhält, wie $c : \sqrt{b}\,c$; demnach wird

A =

$A = P c \sqrt{b c}$, und dieß in den Ausdruck $\frac{A}{d\sqrt{b}}$ gesetzt, giebt $m = \frac{P c \sqrt{c}}{T}$, und man findet vermittelst der Logarithmen durch diese Gleichung

$$m = 271989{,}735.$$

X. Wie also durch diese Aufgabe der Parameter der Bahn, und zwar in der Verhältnis zur mittlern Weite der Sonne von der Erde; so läßt sich umgekehrt aus dem gegebenen Parameter die Zeit bestimmen, in der eine gegebene Fläche der Erdbahn zurückgelegt wird. Es sei nämlich eine solche Fläche $= A$, so wird T in Tagen $= \frac{A}{m\sqrt{b}}$ wo m aus dem vorhergehenden gegeben ist, und das übrige sich auf die oben bestimmte Einheit bezieht. Auch erhält man aus ebender Gleichung $A = m T \sqrt{b}$, welches aus dem gegebenen Parameter und der Zeit die Fläche giebt, die der Planet in der gegebenen Zeit zurücklegt. s. Hrn. Euler a. a. O. p. 9.

XI. Die wahre Anomalie heißt in der Astronomie der Winkel an der Sonne A S M (15. Fig.) den zwo Linien, die eine aus dem Punkt der Sonnenferne, die andere aus dem jedesmaligen Stand des Planeten, an die Sonne gezogen, mit einander machen. Dieser Winkel ist bei Bestimmung der Planetenbahnen von größter Wichtigkeit, daher wir hier noch einiges davon beibringen wollen. Wenn die

Entfernung des Scheitels vom Brennpunkt SA des Kegelſchnitts ABM, und der zugehörige Parameter, deſſen Hälfte BS iſt, gegeben wird; daraus die Verhältnis zwiſchen SM (d. i. der Entfernung eines jeden Punkts M vom Brennpunkt S) und ASM oder der wahren Anomalie zu finden. S ſei der Stand der Sonne, und AS ihre Entfernung von der Sonnennähe = e; BS = b; aus M laſſe man ein Perpendikel, das die verlängerte Axe AS in P ſchneidet; ſo wird $MS = e + \frac{b - e}{e} . AP$ Anal. des Unendl. 629. daſelbſt 2 b ſtatt b und x ſtatt AP. Vergleicht man nun die Entfernung MS = y und den Winkel ASM = v mit einander, ſo wird aus Trigon. §. 352. PS = — y . Cof v, und weil AP = e + PS, ſo wird AP = e — y . Cof v, und dieß in der vorigen Formel ſubſtituirt, giebt

$$MS = e + \left(\frac{b - e}{e}\right) \times (e - y . \text{Cof } v) =$$

$$b - \frac{(b - e) . y . \text{Cof } v}{e}; \text{ alſo cof } v = \frac{e(b - y)}{y . (b - e)}$$

$$\text{und } y = \frac{e\,b}{e + (b - e)\,\text{Cof } v}$$ daß ſich alſo auf ſolche Art aus der wahren Anomalie der Abſtand des Planeten von der Sonne, und umgekehrt aus dieſem die wahre Anomalie finden läßt.

XII. Setzt man den Winkel ASM = 180°, ſo ſtellt y den Abſtand der Sonnenferne von der

Sonne

Sonne vor, die $= \frac{eb}{2e - b}$ wird, weil in diesem Fall $\text{Cos}\, v = -1$. Man erhält also die grosse Axe der Bahn, wenn man die Entfernung der Sonnennähe von der Sonne addirt; dadurch giebt sich die

grosse Axe $= \frac{eb + 2e^2 - eb}{2e - b} = \frac{2e^2}{2e - b}$ und

die halbe Axe $= \frac{e^2}{2e - b}$. Für $b = e$ wird die krumme Linie ein Kreis, dessen Mittelpunkt S und Halbmesser AS ist. Eine Ellipse wird sie für $b > e$; und weil der vorige Ausdruck für die Axe für $b = 2a$ unendlich wird, so wird da die krumme Linie eine Parabel. Für $b > 2e$ wird der Werth der grossen Axe verneint, folglich die Bahn da eine Hyperbel. Das zeigt, wie die krumme Linie durch b und e bestimmt wird.

XIII. Aus zwoen Abständen SB und SM eines Planeten oder Cometen von der Sonne, dem Winkel der Linien von diesen zwoen Stellen an die Sonne gezogen, da mit einander machen oder MSB, und dem Parameter läßt sich die ganze Bahn dieses Weltkörpers finden. Es heisse der halbe Parameter b, ferner sei $BS = f$, $MS = m$, der Winkel $BSG = p$, $AS = e$ und $ASB = v$, also $ASM = v + p$; so giebt die Aufgabe (XI.) $BS = f = \frac{eb}{e + (b - e) \cdot \text{Cos}\, v}$ und $MS = m =$

$\frac{eb}{e + (b - e) \cdot \text{Cof}(v + p)}$; daraus läßt ſich ein doppelter Werth für e oder die Entfernung der Sonnennähe von der Sonne herleiten. Die erſte Gleichung giebt nämlich $e = \frac{bf \cdot \text{Cof } v}{b - f + f \cdot \text{Cof } v}$; die andere $e = \frac{bm \cdot \text{Cof}(v + p)}{b - m + m \cdot \text{Cof}(v + p)}$; dieſe Werthe einander gleichgeſetzt, giebt $(b - m) \cdot f \cdot \text{Cof } v = (b - f) \cdot m \cdot \text{Cof}(v + p) = (b - f) \cdot m \cdot (\text{Cof } v \cdot \text{Cof } p - \text{ſin } v \cdot \text{ſin } p)$; und das giebt endlich $\frac{(b - m) \cdot f}{(b - f) \cdot m} = \text{Cof } p - \text{tang } v \cdot \text{ſin } p$.

Nun läßt ſich aber v durch bekannte Gröſſen ausdrucken; es iſt nämlich

$$\text{tang } v = \text{Cot } p - \frac{(b - m) \cdot f}{(b - f) \cdot m \cdot \text{ſin } p} \text{ oder}$$

$$= \frac{(b - f) \cdot m \cdot \text{Cof } p - (b - m) \cdot f}{(b - f) \cdot m \cdot \text{ſin } p}$$

und weil ſolchergeſtalt v eine gegebene Gröſſe iſt, ſo iſt auch der oben gefundene Werth von $e = \frac{bf \cdot \text{Cof } v}{b - f + f \cdot \text{Cof } v}$ in lauter gegebenen Gröſſen ausgedruckt; es iſt aber in (XII.) ſchon gewieſen worden, wie die krumme Linie durch e und b beſtimmt iſt, und ſo beſtimmen alſo auch hier die gegebenen Stücke die Bahn des Planeten.

Dieſe

* * *

Diese Abhandlung schickt sich vollkommen an diese Stelle, da man im Buche selbst eine Anwendung der Integralrechnung auf Keppl. Theorie der Planeten antrift. Wenigstens wird mich der Vorwurf, daß ich sie nur zur Ausfüllung des Platzes hergesetzt hätte, nicht treffen, weil ich sonsten eben den Platz aus der im vor. St. dieser Erl. angeführten Kiesischen Dissert. über die Kästnerische Anal. des Unendl. völlig hätte ausfüllen können. Das gegenwärtige hatte mir aber nützlicher und zur Erläuterung verschiedener in der Anal. des Unendl. befindlichen Sätze wirklich dienlicher geschienen, da in der nur erwähnten Abhandlung gar keine eigentliche Erläuter. über das Käsin. Buch vorkommen.

Ich würde hiermit diese Erl. beschliesen, wenn ich nicht für dienlich hielte, nur noch in ein paar Zeilen etwas von dem Gebrauch, den man von der Berechnung sphäroidischer Flächen machen kann, zu berühren.

§. 606. 607.

Statt des hier 606. angegebenen Verfahrens könnte man sich auch des folgenden, das dem Erl. der Alg. 349. angebrachten ähnlich ist, bedienen. In einem Sphäroid, das durch die Umwälzung einer krumlinigten Fläche um ihre Abscissenaxe entsteht, gehört zu jedem y, das auf der Abscissenaxe genommen wird, in der sphäroidischen Fläche ein Kreis, dessen Umfang $= 3,14\text{---}.y$ oder überhaupt $\pi . y$ ist, den ich z nennen will. Nimmt man also auf

einer Abſciſſenlinie das zu jedem Werth von x gehörige z zur Ordinate und ſucht nun die Summe aller dieſer Ordinaten, d. i. quadrirt man die Linie, für die

$$z = \pi y$$

ſo erhält man die ganze zu x gehörige ſphäroidiſche Oberfläche; heißt dieſe demnach S, ſo iſt

$$S = \int z\,dx = \int \pi y \,.\, dx \text{ oder}$$
$$= \pi \int y\,dx$$

wo man aus der gegebenen Gleichung für die krumme Linie, deren Sphäroid man betrachtet, den Werth von y oder den von dx, welches von beiden in vorkommenden Fällen am bequemſten iſt, ſubſtituiren muß.

Für die Kegelſchnitte iſt $y^2 = bx \mp \frac{bx^2}{a}$

alſo $y = \sqrt{\left(bx \mp \frac{bx^2}{a}\right)}$, und

$$S = \pi \int dx \,.\, \sqrt{\left(bx \mp \frac{bx^2}{a}\right)}$$
$$= \pi \int x\,dx \sqrt{\left(\mp \frac{b}{a} + bx^{-1}\right)}$$

das ſich nach 399. II. leicht integriren läßt, wenn man die Regeln 397. darauf anwendet. Man erhält auf ſolche Art dort ein tranſcendentiſches Integral wegen des darin befindlichen Ausdrucks Arc tang; eine kleine Ueberlegung zeigt aber, daß hier zu S nur der kleinſte Werth von Arc gehöre, wodurch

also das Integral wieder algebraisch wird. Für die Parabel wäre nur $y = \sqrt{b}x$; also $S = \pi \int dx \sqrt{b}x$ $= \pi \sqrt{b} . x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \pi \sqrt{b} . x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{b} x^3$ oder auch $= \frac{2}{3} \pi y . x$; also ist die Oberfläche eines parabolischen Sphäroids $\frac{2}{3}$ von der sphäroidischen Oberfläche eines Cylinders, der ebendie Höhe und Grundfläche hat; es ist aber auch die parabolische Fläche, durch dessen Umdrehung das Sphäroid entsteht, $\frac{2}{3}$ von dem Rectangel, durch dessen Umdrehung der Cylinder erzeugt wird; und überhaupt müssen sich allemal die Sphäroidischen Oberflächen ebenso verhalten, wie die Flächen, aus deren Umwälzung sie entstehen, weil sich $\pi \int y dx$ wie $\int y dx$ verhält. Also ist die Oberfläche einer Cycloide dreimal so groß, als die Oberfläche einer Kugel von ebender Höhe.

Es sei ABC (fig. 17.) ein parabolischer Hohlspiegel, dessen Parameter $= \frac{1}{4}$, und der seinen Brennpunkt in F hat; $\alpha\beta$ sei der Durchmesser eines auf einem hinter dem Brennpunkt befindlichen Körper beschriebenen Kreises, den ich auf des Spiegels Axe senkrecht annehme. Zieht man nun von α, β, grade Linien αa, βb durch den Brennpunkt F, so ist klar, daß weiter keine Strahlen vom Spiegel auf die Kreisfläche fallen können, als die von Punkten zwischen a und b herkommen; bF aber oder aF läßt sich leicht angeben, und nun hat man

$\alpha F : \alpha\beta = aF : ab$, also $ab = \frac{\alpha . \beta . aF}{\alpha F}$, da

man $\alpha\beta$ so stellen kann, daß die Axe BD durch ihre

Mitte geht. Weil nun der Parameter alſo $\frac{y^2}{x} =$

$\frac{1}{4}$, ſo wird hier $Bc = 4y^2 = 4 . \frac{\alpha\beta^2 . aF^2}{4 . \alpha F^2} =$

$\frac{\alpha\beta^2 . aF^2}{\alpha F^2}$, alſo die innere Fläche des paraboliſchen

Hohlſpiegels $= \frac{2}{3}\pi . \frac{\alpha\beta . aF}{2 . \alpha F} \times \frac{\alpha\beta^2 . aF^2}{\alpha F^2} =$

$\pi . \frac{\alpha\beta}{2} . \frac{2}{3} . \frac{\alpha\beta^2 . aF^3}{\alpha F^3}$ die zu $\alpha\beta$ gehörige Kreis-

fläche iſt $\frac{\pi . \alpha\beta}{2}$; alſo verhält ſich die paraboliſche

zu dieſer $= \frac{2 . \alpha\beta^2 . aF^3}{3 . \alpha F^3} : 1$ oder die erwähnte

Kreisfläche wird von dem paraboliſchen Spiegel

$\frac{2 . \alpha\beta^2 . aF^3}{3 . \alpha F^3}$ mal ſo ſtark als von der Sonne ſelbſt

erhitzt. Auf ebendie Art läßt ſich auch die Verſtär-

kung des Schalls bei elliptiſchen Sprachgewölbern

berechnen.

Verſchie-

Verschiedene Zusätze zu den Erläut. über die Anal. endl. Grössen.

§. 50. Anm.

Es verdient hier noch folgender Satz angemerkt zu werden:

Jede ganze Zahl z von der ganzen Potenz r ist die Summe so vieler auf einander folgenden ungraden Zahlen, als z Einheiten enthält.

Bew. Man setze in den Erl. der Alg. 95.

$$f = z^r$$

$$n = z$$

$$d = 2$$

so wird $$a = \frac{2 . z^r - z . (z - 1) . 2}{2 z}$$

$$= z^{r-1} - (z - 1)$$

welches allemal eine ganze Zahl ist; folglich ist z^r allemal die Summe einer arithmetischen Reihe, deren Glieder lauter ganze Zahlen und Differenz $= 2$ ist.

Ist nun 1.) z gerade, so ist z^{r-1} gleichfalls gerade, aber $z - 1$ ungerade und daher für diesen

Fall

Fall $z^{r-1} - (z - 1) = a$ gleichfalls eine ungerade Zahl; ist 2.) z ungerade, so ist auch z^{r-1} ungerade (Alg. 37.), und $z - 1$ gerade, folglich die Differenz $a = z^{r-1} - (z - 1)$ wieder ungerade; also besteht die erwähnte arithmetische Reihe aus lauter ungeraden Gliedern.

Exemp. 3^5 giebt $a = 3^{5-1} - (3 - 1) = 3^4 - 2 = 81 - 2 = 79$; und nun für $n = 3$

$$3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$$

9^3 giebt $a = 9^2 - 8 = 73$, also für $n = 9$

$$9^3 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89 = 729;$$

Den erwähnten Lehrsatz überschrieb mir vor einiger Zeit mein Freund, Hr. Doktor Mayer, Lehrer der Mathem. zu Göttingen. Die Wahrheit des Satzes bei der zwoten Potenz hatte Ihm, wie Er mir meldet, vorlängst ein Jude, der die Analysis zu verstehen vorgebe, entdeckt; Er selbst aber habe nachher gefunden, daß ebender Satz auch bei höhern Potenzen zutreffe. Mir schien er werth, erwähnt zu werden, und den vorgetragenen allgemeinen Beweiß dazu aufzusuchen.

Zu Erl. S. 108.

Der Werth des Winkels läßt sich aus der Gleichung zwischen seinem sin. und Col. noch auf eine andere Art finden.

Die

Die Gleichung läßt sich nämlich allgemein auch so ausdrucken

$$q . \sin \varphi \pm m . \mathrm{Cos} \varphi = n \quad (\varphi$$

Nun sei α der Winkel, dessen $\sin = m$ und $\mathrm{Cos} = q$, so wird aus φ

$$\sin \alpha . \mathrm{Cos} \varphi \pm \mathrm{Cos} \alpha . \sin \varphi = n$$

oder $\sin (\alpha \pm \varphi) = n$. Ist also n bejaht, so suche man den sin der $= n$; der daneben stehende Winkel, und der ihn zu 180° ergänzt, sind beide $= \alpha \pm \varphi$, und α davon abgezogen giebt φ. Für ein verneintes n sind die beiden Werthe von $\alpha \pm \varphi$ die, welche die vorigen beiden zu 360° ergänzen; und α davon abgezogen giebt auch für diesen Fall die beiden Werthe für φ. Es kommt also hierbei nur drauf an, den Winkel α zu finden. Der Halbmesser des Kreises, in welchem $\sin \alpha = m$, $\mathrm{Cos} \alpha = q$, ist $= \sqrt{(m^2 \pm q^2)}$; also ist $\sin \alpha = m$ und $\mathrm{Cos} \alpha = q$ für den sin tot $= \sqrt{(m^2 \pm q^2)}$. Um also m auf einen sin tabb. zu bringen, setze man

$$\sqrt{(m^2 \pm q^2)} : 10000000 = m : \frac{10000000 . m}{\sqrt{(m^2 \pm q^2)}}$$

und suche nun unter den sin tabb. den auf, der $= \frac{10000000 . m}{\sqrt{(m^2 \pm q^2)}}$; der zugehörige Winkel ist α; und statt n muß man nun auch $\frac{10000000 . n}{\sqrt{(m^2 \pm q^2)}}$ setzen, damit $\sin (\alpha \pm \varphi) = n$ bleibe. Zu dem $\sin = \frac{10000000 . m}{\sqrt{(m^2 \pm q^2)}}$ könnten die beiden Winkel, der in

den

den Tafeln danebenstehende und dessen Complement zu 180°, gehören; dadurch erhielte also α und sin $(\alpha + \Phi)$ zweene folglich $\alpha + \Phi$ vier verschiedene Werthe, da die Kästnerische Auflösung ihrer doch nur zweene giebt. Dieser Zweifel läßt sich aber leicht heben, wenn man nur bedenkt, daß α ein Winkel sein soll, dessen $\sin = \frac{10000000 \cdot m}{\sqrt{(m^2 + q^2)}}$ und $\cos = \frac{10000000 \cdot q}{\sqrt{(m^2 + q^2)}}$ beide gegeben sind, und daher α folglich auch $\sin (\alpha + \Phi)$ nur einen Werth hat, welches zweene Werthe für $\alpha + \Phi$ giebt, den in den Tafeln stehenden und dessen Ergänzung zu 180°. Dieß letzte, das ich hier wohl voraussetzen dürfte, besonders zu beweisen, will ich noch nachstehendes beifügen:

Lehnsatz. Ein Winkel, dessen $\sin = m$, und $\cos = q$ beide gegeben sind, hat nur einen einzigen Werth α, der sich auch bestimmen läßt.

Bew. I. Fall. Wenn m bejaht ist, so ist $\alpha < 180°$; nun ist 1.) entweder q auch bejaht, oder 2.) q verneint; im ersten Fall muß $\alpha < 90°$ sein, oder sein Werth ist der in den Tafeln neben $\sin = m$ stehende Winkel; im andern Fall ist $\alpha > 90°$, folglich des in den Tafeln stehenden seine Ergänzung zu 180°.

II. Fall. Wenn m verneint ist, so ist $\alpha > 180°$, aber wiederum 1.) entweder q auch verneint, oder 2.) q bejaht; im ersten Fall muß $\alpha < 270°$ sein,

sein, und sein Werth ist also des in den Tafeln seine Ergänzung zu 360°, oder er ist der in den Tafeln stehende ✠ 180°; im andern Fall ist $\alpha > 270°$ also des in den Tafeln seine Ergänzung zu 360°.

Ex. Es sei 3. sin φ ✠ 4. Cos $\varphi = 5$; man sucht φ.

Hier ist $\sqrt{(m^2 ✠ q^2)} = \sqrt{(9 ✠ 16)} = 5$; und

$\frac{m}{\sqrt{(m^2 ✠ q^2)}} = \frac{4}{5} = 0,8$, also $\frac{10000000 . m}{\sqrt{(m^2 ✠ q^2)}} =$ 8000000, dieß ist in den Tafeln der sin 53° 8′, also ist

$$\alpha = 53° 8'$$

Nun wird hier $n = \frac{10000000}{\sqrt{(m^2 ✠ q^2)}} \cdot 5 = 10000000$,

also wird aus sin $(\alpha ✠ \varphi) = n$, hier

$$\sin (53° 8' ✠ \varphi) = 10000000$$

folglich

1.) $53° 8' ✠ \varphi = 90°$

2.) $53° 8' ✠ \varphi = 180° - 90° = 90°$

In diesem Exempel sind also beide Werthe von φ einander gleich; es wird nämlich

$$\varphi = 90° - 53° 8'.$$
$$= 36° 52'$$

Probe. In der Formel

3. sin φ ✠ 4. Cos $\varphi = 5$ (✠

versteht sich $r = 1$; also hat man

sin φ

$$\sin \varphi = 0,5999549 \text{ ✠}$$
$$\text{und } \operatorname{Cof} \varphi = 0,8000338 \text{ ✠}$$

demnach

$$3.\ \sin \varphi = 1,7998647 \text{ ✠}$$
$$4.\ \operatorname{Cof} \varphi = 3,2001352 \text{ ✠}$$

giebt addirt $= 4,9999999$ ✠

welches mit $\frac{\pi}{4}$, so genau es hier angeht, übereinstimmt.

§. 310.

Die Rechnung S. 158. muß so geführt werden

$$A1 = m e x^{m-1} \text{ ✠ } \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 x^{m-2}$$

$$A2 = m e \left(x^{m-1} \text{ ✠ } (m-1) e x^{m-2} \right.$$
$$\left. \text{ ✠ } \frac{(m-1).(m-2)}{1.2} e^2 x^{m-3} \text{ ----- } \right)$$

$$\text{ ✠ } \frac{m.(m-1)}{1.2} e^2 \left(x^{m-2} \text{ ✠ } (m-2).e x^{m-3} \right.$$
$$\left. \text{ ✠ } \frac{(m-2).(m-3)}{1.2} e^2 x^{m-4} \text{ ----- } \right)$$

$$\text{also } A2 - A1 = B1 = m.(m-1).e^2 x^{m-2}$$
$$\text{ ✠ } \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2} \text{ ✠ } e^3 x^{m-3}$$

$$\text{ ✠ } \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2}.e^3 x^{m-3} \text{ ✠ --- } = m.(m-1).$$

$$e^2 x^{m-2} \text{ ✠ } m.(m-1).(m-2).e^3 x^{m-3} \text{ ✠ ---}$$

Diese

Diese Rechnung giebt sich noch leichter so:

Hauptreihe

$$x^m = x^m$$

$$(x+e)^m = x^m + mx^{m-1}e + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}e^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}e^3 \ldots$$

$$(x+2e)^m = x^m + 2. \quad + 4. \quad + 8. \quad \ldots$$

$$(x+3e)^m = x^m + 3. \quad + 9. \quad + 27. \quad \ldots$$

$$(x+4e)^m = x^m + 4. \quad + 16. \quad + 64. \quad \ldots$$

I. Differenzreihe oder $A1 =$

$$mx^{m-1}e + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}e^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}e^3 \ldots$$

$$mx^{m-1}e + 3.\frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}e^2 + 7.\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}e^3 \ldots$$

$$mx^{m-1}e + 5.\frac{m.(m-1)}{1.2}x^{m-2}e^2 + 19.\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}e^3 \ldots$$

II. Differenzreihe oder B 1 =

$$m.(m-1).x^{m-2}d^2 + m.(m-1).(m-2).x^{m-3}d^3 - \ldots$$

$$m.(m-1).x^{m-2}d^2 + 2m.(m-1).(m-2).x^{m-3}d^3 - \ldots$$

III. D. R. oder C 1 =

$$m.(m-1).(m-2).x^{m-3}d^3 - \ldots$$

⋮

nte D. R =

$$m.(m-1).(m-2).(m-3)\ldots 2.1.d^m$$

Das allgemeine Gesetz des Fortgangs wird aber durch diese Aufgabe 310. nicht bestimmt. Daher müßte man, wo man von vielen Diff. Reihen Glieder nöthig hätte, die Glieder wie hier erst berechnen, welches sich leicht thun liesse, ob es gleich oft langweilich werden könnte. Bei vorkommenden Fällen ist es indessen meistens nützlicher, dergleichen Differenzen gleich in Zahlen zu suchen. s. unten Erl. zu 724.

Zu Erl. S. 287.

Nach den Worten: nur q statt n gesetzt" setze man:

Der Werth von a in (♀) muß der Natur der Sache gemäß desto grösser werden, je grösser m + q wird, wie auch die Gleichung selbst ergiebt. Grösser aber als (1 + m).p kann a niemals sein, weil der Creditor nach Abzug des Interusuriums doch allemal

allemal noch etwas erhalten muß, und also (1 ✠ m) p — a > o seyn muß. Also kann für sich betrachtet der Ausdruck (♀) alle mögliche Werthe haben, die zwischen o und (1 ✠ m) p fallen. Dabei aber muß man nun folgendes bedenken: a ist eine Grösse, die durch Zusammenzählung lauter nicht **wirklich ausgezahlter**, sondern **zurückbehaltener** und nun **auf einmal** auszuzahlender **Zinsen** entstanden ist; nun darfen solche nach den Gesetzen nicht mehr als das zu zahlende Capital selbst ausmachen; (*) folglich ist $mp - a$ wenigstens $= \frac{1 \text{✠} m}{2} \cdot p$, und daher der gröſte Werth von ♀ dieser

$$p \cdot \left((m \text{✠} 1) - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) \cdot e^{q+m}} \right) = \frac{1 \text{✠} m}{2} \cdot p$$

l. 10. C. de usur. Dieß giebt nun

$$m \text{✠} 1 - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) \cdot e^{q+m}} = \frac{m \text{✠} 1}{2}$$

folglich

$$\frac{e^{m+1} - 1}{(e-1) \cdot e^{q+m}} = \frac{m \text{✠} 1}{2} \quad (N.$$

(*) Ich lasse mich hier in die bekannte juristische Streitigkeit nicht ein, da wenigstens soviel gewiß ist, daß eine Menge von Rechtsgelehrten die usuras ultra alterum tantum für verbothen halten, und also dieserwegen schon zu zeigen ist, wie auf solchen Fall die Rech-

Wäre also $m = o$, wie für die Formel ⊙, so wäre $\frac{e - 1}{(e - 1).e^q} = \frac{1}{2}$, also $e^q = 2$ oder $q \mid e = \mid 2$, und $q = \frac{\mid 2}{\mid e} = \frac{3010300}{211893} = 14$ Jahren 73 Täg.

für $e = \frac{21}{20}$. Dieß ist demnach für $m = o$ der größte Werth, für den man das Interusurium berechnen darf.

S. 287. am Ende.

Hier setze man noch folgendes hinzu:

Hätte hingegen Jemand das Capital p schon vor v Jahren $m + 1$ Jahre lang nach einander zu fodern gehabt, und der Debitor will es jetzt erst zahlen, so ist klar, daß nun der **Creditor** völlig ebendas in Absicht des Interusuriums zu fodern berechtiget ist, was **Er** dem **Debitor** hätte vergüten müssen, wenn er von diesem ein Capital p, das er m Jahre lang nach einander und zwar (nur das vorige **rückwärts** gerechnet) nach v Jahren zum letztenmal, also nach $v - m$ Jahren zum erstenmal zu fodern gehabt hätte, gleich beim Anfang der Zeit erhielte; man setze also in (♀) $v - m$ statt q, so erhält

Rechnung geführt werden muß. S. meines Bruders praktische rechtliche Abhandlung von den usuris ultra alterum tantum und deren Rechtmässigkeit im deutschen Reich.

erhält man den Werth von a, den der Creditor auſ-
ſer dem wahren Capital zu fodern hat, nämlich

$$a = p.\left((m+1) - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{v-m+m}}\right)$$

$$= p.\left((m+1) - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{v}}\right)$$

folglich ist der Werth des ganzen Capitals, das der
Creditor fodern kann

$$(1+m).p+a = p.\left(m+m+2 - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{v}}\right)$$

$$= p.\left(2m+2 - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{v}}\right)$$

oder wenn man q statt v beibehält, so wird für die-
sen Fall aus ♀ die Gleichung

$$a = p.\left((m+1) - \frac{e^{m+1} - 1}{(e-1).e^{q}}\right)$$

und aus ☽ diese

$$(1+m)\,p+a = p.\left(2(m+1) - (e^{m+1} - 1) : (e-1).e^{q}\right)$$

Zu Erl. 504.

Wenn man Erl. 481. a — x statt x schreibt, so
erhält man die Gleichung für die Conchoide für Ab-
scissen von der krummen Linie angerechnet

$$y^2 = \frac{(b \pm a - x)^2 . (2ax - x^2)}{(a - x)^2}$$

und das dient, den Halbmesser der Krümmung am Scheitel der Conch. zu bestimmen. Nimmt man nämlich x gegen a sehr klein an, so verwandelt sich die Gleichung in nachstehende

$$y^2 = \frac{(b \pm a)^2 . 2a \left(x - \frac{x^2}{2a} \right)}{a^2}$$

oder weil, für ein ausserordentlich kleines x, $\frac{x^2}{2a}$ gegen x nicht zu rechnen ist,

$$y^2 = \frac{2(b \pm a)^2}{a} . x$$

also ist die Krümmung der Conchoide um den Scheitel herum paraboliſch; sie ist nämlich da mit einer Parabel einerlei, deren Parameter $= \frac{2(b \pm a)^2}{a}$;

nun ist zuvor erwiesen worden, daß der Halbmesser der Krümmung am Scheitel der Parabel ihrem halben Parameter gleich ist; also ist hier der Halbm. der Kr. am Scheitel der Conchoide $= \frac{1}{2} \left(\frac{2(b \pm a)^2}{a} \right)$

$= \frac{b \pm a^2}{a}$ völlig wie in der Anal. des Unendlichen 547. Erläut.

§. 694.

§. 694.

Ein Beispiel, wo ein ähnliches Verfahren gebraucht wird, findet sich Astron. §. 99. S. 578. Ich will solches hier beibehalten, und die Rechnung dabei auseinander setzen. Man setze nämlich a. a. O. die Glieder der Reihe, welche h ausdruckt, so unter einander:

H'
9 S
☉) 51 T
20 Qua

Nun setze man H, das etwas kleiner als h ist, anfänglich = h, und suche nachher erst diesen Werth noch genauer; so giebt diese Voraussetzung auch S = ſ, T = t, Q = q, und diese Werthe neben die lothrechte Reihe ☉ geschrieben, giebt

H = h
✠ 9 S = ✠ 9 ſ
☾) ✠ 51 T = ✠ 51 t
✠ 20 Q = ✠ 20 q

Nun soll die Summe der lothrechten Reihe = h sein, also muß zu dem anfangs angenommenen Werth von H = h noch — 9 ſ kommen, damit — 9 ſ und ✠ 9 ſ zusammen die 0 ausmachen; dadurch wird aus ☾

H = h — 9 ſ
24) ✠ 9 S = ✠ 9 ſ
✠ 51 T = ✠ 51 t
✠ 20 Q = ✠ 20 q

Nun sind wir also dem wahren Werth von H schon näher, und daraus giebt sich auch der von S, T u. s. f. genauer; nämlich aus H = h — 9 f folgt S = f — 9 qua, T = t — 9 qui, Qua = qua — 9 sext u. s. f. also 9 S = 9 f — 9. 9 qua = 9 f — 81 qua; 51 T = 51 t — 51. 9 qui; 20 Qua = 20 qua — 20. 9 sext, und nun haben wir statt 24

♂.) H = h — 9 f — 51 t

✠ 9 S = ✠ 9 f ✱ — 81. qua.

✠ 51 T = ✠ 51. t ✱ — 9. 51 qui.

✠ 20 Q = ✠ 20 qua ✱ — 9. 20 sext

Weil nun ausser dem h zur Rechten allemal die Glieder, worin einerlei Buchstab vorkommt, zusammen die 0 ausmachen müssen, indem die Summe der lothrechten Reihe blos = h ist, so muß das dritte Glied in der Horizontalreihe für H ✠ 51 t = 0, also dieß dritte Glied für sich = — 51 t sein, und ebenso das vierte zu — 81 qua ✠ 20 qua addirt = 0, also für sich = ✠ 61 qua sein; dadurch wird nun aus ♂

♀.) H = h — 9 f — 51 t ✠ 61 qua

✠ 9 S = ✠ 9 f ✱ — 81

✠ 51 T = ✠ 51 t ✱ — 9. 51 qui

✠ 20 Q = ✠ 20 ✱ — 9. 20 sext.

Aber

Aber hier giebt der Werth von H = h — 9 f — 51 t ✠ 61 qua, auch S = 9 f — 81 qua — 51 qui ✠ 61 sext, und T = 51 t — 9. 51 qui — 51. 51 sext u. s. f.

ϰ) H = h — 9 f — 51 t ✠ 61 qua

✠ 9 S = ✠ 9 f * — 81 — 9. 51 qui ✠ 9. 61 sext

✠ 51 T = ✠ 51. * — 9. 51. — 51. 51.

✠ 20 Q = ✠ 20. * — 9. 20.

wo in der Horizontalreihe für H das 5te Glied zu (— 9. 51 — 9. 51) qui addirt = 0, also für sich = ✠ 18. 51 qui u. so das sechste = (✠ 9. 20 ✠ 51. 51 — 9. 61) sext = 2232 sext sein muß. Und hieraus giebt sich der Werth von H bis auf sext, der aber im Buche nur bis auf quart angegeben ist.

Zu Erl. §. 724. am E.

Wenn man die ersten Differenzen aus den Reihen 310. nimmt, so dient das gegenwärtige auch, einen allgemeinen Ausdruck für die Summe der Reihe

$$x^m \dotplus (x \dotplus e)^m \dotplus (x \dotplus 2e)^m \dotplus (x \dotplus 3e)^m \dotplus \cdots \dotplus (x \dotplus re)^m$$

zu finden; weil er aber zusehr zusammengesetzt wird, so ist es bequemer, nur die Hauptreihe 310. zu gebrauchen; aus ihr hat man nämlich

$$\odot)\ x^m + (x+e)^m + (x+2e)^m \text{ ---- } + (x+re)^m =$$

$$(r+1)x^m + \left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\\vdots\\r\end{matrix}\right\} m\,x^{m-1}e + \left\{\begin{matrix}1\\2^2\\3^2\\\vdots\\r^2\end{matrix}\right\} \frac{m.(m-1).x^{m-2}e^2}{1.2} + \left\{\begin{matrix}1\\2^3\\3^3\\\vdots\\r^3\end{matrix}\right\} \frac{m.(m-1).(m-2)x^{m-3}e^3}{1.2.3} \ldots$$

$$\ldots + \left\{\begin{matrix}1\\2^{m-1}\\3^{m-1}\\\vdots\\r^{m-1}\end{matrix}\right\} \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots 3.2.x^1.e^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} + \left\{\begin{matrix}1\\2^m\\3^m\\\vdots\\r^m\end{matrix}\right\} e^m$$

$$\ldots + (x+re)^m$$

(⊙) 2 ⊙

Nun ist zuvor gezeigt worden, wie sich die Summen der Reihen $1 + 2 + 3 - - - - + r$; $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 - - - - + r^2$, u. s. w. finden läßt; man suche sie also auf die gewiesene Art, und heisse sie nach der Ordnung $\alpha, \beta, \gamma - - - \tau, \varphi$, wo $\varphi = 1 + 2^m + 3^m - - - - + r^m$; dadurch verwandelt sich die vorige Reihe in nachstehende ☿)

$$(r + 1).x^m + \alpha m x^{m-1} e + - - + \tau . m x e^{m-1} + \varphi e^m$$

Man darf aber nicht denken, daß man durch diese Methode, wenn man hier m verneint setzte, die Summe der Reihe

$$\frac{1}{x^m} + \frac{1}{(x+e)^m} - - - - - + \frac{1}{(x+re)^m}$$

erhielte. Wäre nämlich m verneint, so wäre $m - 1 = -(m+1)$; $m.(m-1) = +m.(m+1)$; $m.(m-1).(m-2) = -m.(m+1).(m+2)$ u. s. w. und die Glieder der Reihe ☿ würden also abwechselnd bejaht und verneint, und die Gleichung (⊙) verwandelte sich dann in folgende: ♄)

$$\frac{1}{x^m} + \frac{1}{(x+e)^m} + \frac{1}{(x+2e)^m} - - - + \frac{1}{(x+re)^m} = \frac{r+1}{x^m} - \frac{\alpha . me}{x^{m+1}} + \frac{\beta . m.(m+1).e^2}{x^{m+2}} - - - \mp \frac{\tau . mx}{e^{m+1}} \pm \frac{\varphi}{e^m}$$

wo

wo nämlich das obere oder untere Zeichen gölte, nachdem m gerade oder ungerade wäre. Man sieht aber leicht, daß es nach dem Anfang und Fortgang der Reihe nicht geschehen kann, daß x in den Zähler und e in den Nenner käme, also führte diese Reihe auf was Ungereimtes, und läßt sich deßwegen nicht gebrauchen; sie dürfte nämlich nicht, wie hier vorausgesetzt wird, abbrechen, sondern müßte unendlich fortgesetzt werden, daferne man sich die Erweiterung des Gesetzes Alg. 141. auf verneinte Exponenten verstatten wollte s. 753. u. f. Die Betrachtung der höhern Differentialien in der Anal. d. Unendl. giebt hier bessere Mittel, dergleichen Reihen wie die (h) zu summiren. s. die An. d. Un. §. 343. Erläut.

Alphabetisches Verzeichnis
der vornehmsten Sachen und Wörter, welche in der Kästnerischen Analysis vorkommen.

A.

Abgewickelte Linie §. 563.

Amplitudo, bei krummen Linien gebraucht 568.

Asymptote; die gradlinigte ist eine Tangente an einem unendlich entfernten Punkte 108. ihre allgemeine Bestimmung 113. für die Hyperbel 114. 115. durchs Newtonische Parallelogramm 119. krummlinigte ebendas.

B.

Beständige Grösse hat kein Differential 22.

Binomischer Lehrsatz 46. läßt sich aus der Lehre von den Combinationen herleiten 49.

Bogen; Gleichung zwischen ihm und dem Sinus 285. zwischen ihm und dem Quersinus 287. zwischen ihm und dem Cosinus 296. zwischen ihm und der Tangente 299. der umgekehrte Fall 301. zwischen ihm und der Cotangente 302. zwischen ihm und der Secante 303. zwischen ihm und der Cosecante 304.

Brennpunkt u. Brennlinie 99.

C.

Conchoide s. Muschellinie.

Cosinus, den von jedem Bogen, der nicht über 45° ist, zu berechnen 314.

Cuspis, 516.

Cycloide, ihre Tangente 102.

D.

Differential, was es sei 13. rationales und irrationales 259. Verhältnis 15. seine Bezeichnung 18. das Diff. einer krummen Linie 266, 509. eines hyperbolischen Ausschnitts 317, 318. für gewisse Werthe der veränderlichen Grösse 471 — 476. für Funktionen, die zwo veränderliche Grössen enthalten 477 — 486. die drei veränderliche Grössen enthalten 487 — 497. Diff. einer Fläche 205, 505.

Differentialgleichung 19. zwischen Z und z. 20. zwischen Z und u ✢ x — y 21. zwischen Z und xy 24. zwischen v und $\frac{x}{y}$ 26. zwischen u und $\sqrt[n]{u^m}$ 27. zwischen y und $\frac{1}{v^r}$ 28. zwischen u und e^{mx} 241. zwischen y und z^x 236. allgemeine Lehren davon 498 — 504.

Differentiallinie 127. für den Kreis 129.

Differentiiren, was es sei 19.

Differentiodifferential 132. dessen Bezeichnung 139.
Durchmesser, seine Verhältnis zum Umkreise 306.

E.

Elemente von krummen Linien 64.
Erhaben sein 69. diese Eigenschaft bei einer krummen Linie zu entdecken 521.
Erfinder, der Differentialrechnung 44. der Exponentialrechnung 238.
Evolute, was sie sei 563. aus der Gleichung für eine Linie, die für die Evolute zu finden 570. die Ev. von jeder algebraischen Linie ist algebraisch 570. die für die apollonische Parabel 573. für den Kreis 574. für die neilische Parabel 576. die krumme Linie zu finden, der sie zugehört 575. die krummen Linien zu finden, die ihrer Evol. ähnlich sind 578. ordentlich ähnlich 589. verkehrt ähnlich 590.
Exponentialgrösse, was sie sei 235. ihre Differentiation 236. ihre Integration 237. die Exponentialgrösse e^x durch eine Reihe, die nach x fortgeht, auszudrücken 239.

F.

Faktor, Erfindung der dreitheilichten 389 — 396.
Fliesende Grösse und Fluxion 31. die vom Rechteck 32. ihre Bezeichnung 43.
Funktion, gerade und ungerade 348. ganze und gebrochene 347. Zerlegung der letztern 349 — 371. ihre Werthe, wenn sie sich in $\frac{0}{0}$ verwandlen 384.

G.

Gleichungen, zwischen Ordinaten aus einem Punkte und Perpendikeln auf die Tangenten 593. für die archimedische Spirale 594. für die logarithmische 595.

Gränze, einer Grösse 7. solche für $z = au + b$ 9. für Verhältnisse 45. für Wurzeln 194.

Größtes 152. Umstände zu finden, da eine Funktion ein solches wird 155, 156.

H.

Halbmesser der Krümmung 538. für die Radlinie 557.

Harriots Lehrsatz 193.

Hauptlinie 127.

Hohl sein 69. diese Eigenschaft bei einer krummen Linie zu entdecken 521.

Hufe und hufförmiger Abschnitt 617. dessen Inhalt 618. und Fläche 621.

Hyperbel vom dritten Grad 115.

J.

Infinitinomium 56.

Integral 201. dessen Bezeichnung 202. allgemeine Formeln davon, wenn die Differentiale einfach sind 203. leiden eine Ausnahme 218. II. für Exponentialgrössen 237, 242, 243. für zusammengesetzte Differentialien, für $c\,d\,X.(a + X)^p$ 245.

$\frac{-x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\left(a+\sqrt{(a^2-x^2)}\right)^2$ 246.

$x^m(a+bx^n)^p.dx$ 248, 399. $x^m dx\sqrt{(a+bx)}$ und $\frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)}}$ 250. $\frac{1}{2}u^{c-\frac{1}{2}}.(a+bu^{\frac{1}{2}})^p.du$ 251. $x^{2r+1}.(a+bx^2)^p.dx$ 252. $x^{2r+1}.\sqrt{(a+bx^2)}\,dx$ und $\frac{x^{2r+1}.dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$ 253. $(ax^q+bx^s)^p.dx$ 254, 255; $\frac{a^2 dx}{x\sqrt{(ax+x^2)}}$ 257. Formeln für rationale Differentialen von der Form $\frac{M\,dx}{N}$ 385; 397; für $\frac{x^m dx}{\alpha+x^n}$ 398. I. $\frac{x^{-m}.dx}{\alpha+x^n}$ daſ. II. $\frac{x^m dx}{\alpha-x^n}$ daſ. III. $\frac{x^{-m}.dx}{\alpha-x^n}$ daſ. IIII. $x^{m+n}.(a+bx^n)^p\,dx$ 401. $\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ 402. 403. Integrirung, der Differentialgleichungen, wo die veränderlichen Gröſſen vermengt sind 405 — 418. vermittelst des Newtoniſchen Parallelogramms und anderer Methoden 498 — 504. die Integrale sind entweder algebraiſch oder transcendentiſch 398. VI. Irrationalgröſſe 259.

K.

Keplerische Theorie der Planeten, Anwendung der Integralrechnung auf selbige 582 — 601.

Kleinstes, 152. Umstände, da eine Funktion ein solches wird 155, 156.

Kreis, Verhältnis seines Umfangs zum Durchmesser 306. Seine Ausschnitte sind unmögliche Ausschnitte der Hyperbel 324. und umgekehrt 325. seinen Umfang durch Logarithmen auszudrucken 333.

Krümmung, die Stelle zu finden, wo eine gegebene krumme Linie die Krümmung eines gegebenen Kreises hat, 552. die größte oder kleinste zu finden 553. für die archimedische Spirale 555. für die logarithmische 556. Beschaffenheit der Krümmung 560. bei der Parabel 561. bei der logar. Spirale 562.

Krümmungskreis 538. bei den Kegelschnitten 547. bei der cubischen Parabel 551.

Krümmungswinkel 511. ihn da, wo kein Rückkehrpunkt ist, zu finden, 518. bei den Kegelschnitten 524 — 528. unendlich grosser 529. für die archimedische Spirallinie 530. für die parabolische 531.

L.

Linie, die längste oder kürzeste, die sich aus einem gegebenen Punkte an eine krumme Linie ziehen läßt 160. die logarithmische 213. ihre Gleichung 217.

Logarithmen, für eine Zahl zwischen 1 u. 2. durch eine unendliche Reihe ausgedruckt 220. für jede ganze Zahl 224. die ihm zugehörige Zahl zu finden

den 221. natürliche 225. heissen auch hyperbolische 233. V. für die ersten zehen Zahlen 226. ihre Basis 222, 232. Die Log. verschiedener Systemen verhalten sich wie die Subtangenten 227. die briggischen geben sich aus den natürlichen 231. jede Zahl hat unendlich viele in ebendem System 234; 332. eine verneinte hat lauter unmögliche 332. VII. der Log. für den halben Umkreis 343. für die Sinus u. Cos. 344. für Tang. u. Secanten 345. logarithmisches Differential 218. IV.

Lunula 559. X.

M.

Mehr als unendlich 212.

Mond, ein offener 559. X. geschloffener ebend.

Muschellinie, ihre Tangente 97.

N.

Normallinie 91.

O.

Ordnungen des Unendlichen 11.

P.

Parabel, die neilische 269.

Parabolische Linien, dienen die Lehre von den Gleichungen zu erläutern 163.

Parallelepipedum, das die kleinste Fläche bei ebendem Inhalt hat 158.

Point de rebrouffement 516.

Potenz, einer zweitheilichten Wurzel 46. einer unendlichen Reihe 56.
Punctum flexus contrarii 112.
Punctum reflexus 516.

Q.

Quadratur krummer Linien 207. der Parabel 208. ist die erste Quadratur einer krummen Linie 209. Quadratur für die Linie, wo $y = \sqrt[m]{(x \pm a)}$ 210. Quadratur der cubischen Hyperbel 211. aller Hyperbeln, für die $y = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ 212. der gleichseitigen 233. eines Stücks der Kreisfläche 273. eines Kreisabschnitts 275. eines jeden hyperbolischen Abschnitts 321. für Linien, wenn die Ordinaten aus einem Punkte gehen 505. für die archimedische Spirale 506. für unzählige Spirallinien 507. für die parabolische 508. für die logarithmische 510. V. Quadratur der Radlinie 559.

R.

Rectification der krummen Linien 267. der cubischen Parabel 268. der apollonischen 271. hängt von der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel ab 272. der logarithmischen Spirallinie 510. der Radlinie 559. sie läßt sich von unzähligen Linien angeben 571.

Reihe, Ausdruck für ein unbestimmtes Glied derselben 144. die, welche den Sinus durch den

Bogen

Bogen giebt, in Faktoren zu zerfällen 338. und die für den Cosinus 341. alle mögliche, durch die sich eine Reihe auflösen läßt, zu finden 466. Diese Methode ist allgemeiner, als das Newton. Parallelogr. 470.

Rückkehrpunkt 516. es giebt ihrer zwo Arten das. Anm. und 535. IX. ihn zu finden 520.

S.

Schwerpunkt, bei einer ebenen Figur, deren Gestalt gegeben ist, zu finden S. 602. für ein Dreieck S. 603. no. 3. für Kreisstücke das. no. 5. für Sphäroiden von Kegelschnitten no. 15. für Sphäroiden, die durch kegelförmige Bewegung entstehen no. 17.

Secante, von jedem Bogen zu finden 315.

Sinus, von jedem Bogen, der kleiner als der Halbmesser ist, zu finden 310. von jedem Bogen unter 45°, 314. Gleichung zwischen ihm und dem Cosinus vom ein- und vielfachen Winkel 337.

Sphäroid, seine Fläche 606. für die Kegelschnitte 607. sein Inhalt 609. für die Kegelschnitte 610. für unendliche Parabeln 611. für die Cissoide 612. für die logarithmische Linie 613. für die cubische Hyperbel 615. Abschnitte von Sphäroiden 626. für den Kegel 628.

Spirallinie, ihre Tangente hängt mit der unbestimmten Quadratur des Kreises zusammen 106. die parabolische 107. die hyperbolische 599. V.

Spitze 516.

Subnormale 91. bei der Parabel 93. bei der Ellipse und Hyperbel 94.

Subtangente, 76. ihre Verhältnis zur Ordinate 77. Bestimmung ihrer Lage 83. ihre Gleichung und Verzeichnung bei der Parabel 84. bei der Ellipse und Hyperbel 85. der logarithmischen Linie ist unveränderlich 216.

Summe s. Integral.

T.

Tangente; ihre Bestimmung durch die Differentialrechnung 63. zwischen ihr und der krummen Linie läßt sich keine grade Linie mehr ziehen 66. die für Linien, wo die Ordinaten aus einem Punkte gehen 104. die von jedem Kreisbogen zu berechnen 315. aus der vom einfachen Bogen die vom vielfachen zu finden 331. Ausdruck für die von $\frac{1}{n}$ des halben Umfangs 334. die verkehrte Methode der Tang. 262. ordentliche Methode derselben 77 — 92.

Triangulum characteristicum 78.

U.

Unendlich, wachsen 1; 3. abnehmen 5. klein ebendas. eine unendliche Reihe kann eine endliche Summe haben 2. und unendlich lange Sphäroiden einen endlichen Inhalt 614.

Vngula 617.

V.

Verschwinden 5.

W.

Weite, von Bögen krummer Linien gebraucht 568.

Wendungspunkt §. 112. ihn zu finden 532. bei den paraboliſchen Linien 533. bei der krummen Linie (Alg. 474.) 534. bei der paraboliſchen Spirale 536.

Wurzeln; die Differentialgleichung hat r — 1 gleiche, wenn die Hauptgleichung deren r hat 172. unmögliche ſind in gerader Menge vorhanden 174. Beſtimmung dieſer Menge in der Hauptgleichung durch die Differentialgleichung 175. in den cubiſchen Gleichungen 185. die Menge der bejahten und verneinten aus den Zeichen der Glieder einer Gleichung zu finden 190.

Z.

Zuſtand, der letzte einer Gröſſe 4.

Druckfehler

in der Kästnerischen Anal. des Unendl.

Seite Zeile

20 16 statt: beschrieben lies: beschrieben werden

23 15 st. $(f - e)^{x-2}$ l. $(f - e)^{x-1}$

— 13 st. $e^2 x^{n-1}$ l. $e^2 x^{n-2}$

29 1 st. 40. l. 39.

32 6 st. Qy^n l. Qy^{n+1}

33 2 st. $\frac{dy}{d\omega}$ l. $\frac{d\omega}{dy}$

44 19 st. n — 1 l. n + 1

42 16 statt 5. lies 6.

46 1 st. $\frac{\alpha}{\pi}$. u l. $\frac{\alpha}{\pi}$ $\dot{u}^{\omega}$

48 15 st. einem l. in einem

50 letzte Mh muß in der Figur erst gezogen werden.
st. MN l. ML

53 11 st. sin MNS . sin MNS l. sin MNS:
sin NMS

55 20 st. Ordinate l. Abscisse

56 2, 5, 10, st. Ordinate l. Abscisse

63 9 statt F lies F, G.

65 11 st. 200. l. 100.

72 16 st. a. — (a — 2x) l. a. — x:(a — 2x)

73 6 st. AQ = x; = x l. AQ = x;

— 8 statt — x lies — 3x,

75 15 st. vor. l. ver.

S. 76.

Druckfehler in der Käſtn. Anal. d. Unendl. 489

Seite Zeile

76 5, 6, ſtatt LK lies Lx

— 23 ſt. 121. l. 123.

77 vorlezte, ſt. 121. l. 122.

— lezte ſt. $\frac{a - x}{a}$ l. $\frac{a}{a - x}$

80 8 ſt. TN l. Tm

— 10 ſt. tr l. tQ

81 3 ſt. dv. l. dy

— 8 ſtatt v. lies y

82 2 ſt. Lx — ML l. ML — Lx

— 5 ſt. ddv l. ddy

— 9 ſt. 132. l. 133.

83 4 ſt. dx^3 l. dx^2

89 1 ſt. $\frac{c\,d\,v}{v}$ l. $\frac{c\,d\,v}{dx}$

90 9 ſt. $\frac{d^2y}{dx}$ l. $\frac{d^2y}{dx^2}$

ſt. $\frac{d^3y}{dx}$ l. $\frac{d^3y}{dx^3}$

92 20 ſtatt 148. lies 146.

93 5 ſt. erſte l. zweite

100 11 ſt. O. l. die Abſciſſenlinie durch O.

103 2 ſt. 263. l. 163.

— 6 v. unt. ſt. x^{m-1} l. x^{m-2}

— 24 ſt. n — 1te l. m — 1te

104 9 ſt. 11. l. 12.

105 7 ſt. eb= l. ab=

108 3 ſt. 11. f. l. 12. f.

Seite	Zeile	
110	16	ſt. Wurzelzeichnungen l. Wurzelgleichungen
116	letzte	ſt. y gegen q l. y gegen p
117	3	ſt. ein l. in
118	11	ſtatt $\frac{dy}{dy}$ lies $\frac{dy}{dx}$
124	8	ſtatt r lies r^2
126	9	ſt. als kleiner l. kleiner
128	2	ſt. 167. l. 163.
132	11	ſt. $\frac{dx}{dy}$ l. $\frac{dy}{dx}$
133	2	ſt. Differentiallinien l. Differentialien
134	19	ſt. verneint l. bejaht oder verneint
137	19	ſt. dx^3 l. dx^4
142	8	ſt. Gleichungen l. Gleichung
143	11	ſt. $\frac{2}{3}b$ l. $\frac{2}{3}x$
147	19	ſt. $\frac{AR}{AB}$ l. $\frac{AR}{AP}$
162	2	ſt. ſetzt l. ſucht
163	19	ſt. AO l. AG
164	7	ſt. in l. der
165	19	ſt. $\frac{1}{4}y^4$ l. $\frac{1}{4}v^4$
169	vorletzte,	ſt. n 1 l. n — 1
170	1	ſt. $e^m x^d x$ l. $e^{mx} dx$
—	5	ſt. mx l. e^{mx}
—	9	ſt. $\frac{-\varepsilon.(\varepsilon-1)}{m^3}$ l. $\frac{\varepsilon.(\varepsilon-1)}{m^3}$

S. 170.

Druckfehler in der Käſtn. Anal. d. Unendl. 491

Seite Zeile

170 10 ſt. $\frac{-\varepsilon.(\varepsilon-1)---1}{m^{\varepsilon}+1}$ l. $\frac{+\varepsilon(\varepsilon-1)--1}{m^{\varepsilon}+1}$

172 10 ſt. $(lx)^{n-2}$ l. $(lx)^{n-2}dx$

174 11 ſt. $\frac{-n.(n-1)}{(\varepsilon+1)^3.(lx)^{n-2}}$ l. $\frac{+n.(n-1.(lx)^{n-2}}{(\varepsilon+1)^3}$

— 12, 16, letzte ſt. — n l. + n

175 1, 4, ſt. + n l. + n

— 3 ſt. — n l. + n

181 3 ſt. z^p l. $z^p dz$

— 5 ſt. $\log z^z$ l. $\log z$

— 10 ſt. $+\frac{dz}{z^2}$ l. $-\frac{dz}{z^2}$

— 12 ſt. + Conſt = o l. + Conſt;

181 15 ſt. VIIII. l. VIII oder XII.

— — nach --- $+\frac{7}{4}$ lies: weil hier $nb^{r+1} = 1$

iſt, mit 1 dividirt, kommt $\int \frac{x^3 dx}{(1+x)^2}$

$= \frac{(1+x)^2}{2} - 3(1+x) + 3\log$

$(1+x) - \frac{1}{1+x} + \frac{7}{2}$;

— vorletzte, ſt. II. l. III.

182 9 ſt. bu l. $bu^{\frac{1}{2}}$

183 2 ſt. 249. VIII. l. 248. VIII. u. XIII.

— 4; 15; ſt. p + r l. p + 1

S. 183.

Seite Zeile

183 7 ſt. 249. l. 248.

184 letzte ſt. $(zz - bb)^3$ l. $(zz - bb)^2$

187 19 ſtatt cc l. c

192 1 ſt. $10y$ l. $10y^8$

— 2 ſt. $8a^8$ l. $9a^8$

— 9 muß das √ ausgeſtrichen werden.

194 4 v. unt. ſtatt $2(r - 1)$ l. $2(r \dotplus 1)$

195 10 ſt. 2^{t+1} l. 2^{2t+1}

197 5 ſt. ∧ l. √

— 2 ſt. $\frac{1}{128.16}$ l. $\frac{5}{128.16}$

— vorletzte ſt. $u^{11:12}$ l. $u^{11:2}$

199 6 ſt. 2^{2+2} l. 2^{2t+2}

— 11 ſt. $\frac{1}{64.11}$ l. $\frac{5}{64.11}$

200 6 ſt. 128.9 l. 16.7

— 12 ſt. $\sqrt{\frac{v}{r}}$ l. $\sqrt{\frac{2v}{r}}$

— 14 ſt. 2^{t+1} l. 2^{2t+1}

201 10 ſt. $ds^2 \dotplus \frac{s^2 ds^2}{rr - ss}$ l. $\sqrt{\left(ds^2 \dotplus \frac{s^2 ds^2}{rr - ss}\right)}$

202 15 ſt. 5.3 l. 5.32.

203 2 ſt. r3, r4 l. r^2, r^4;

— 7 ſt. s^{2n+2} l. s^{2n+3}

207 15 ſt. daß α l. α

208 13 ſt. 1 $\underline{\dotplus}$ 1 l. $\underline{\dotplus}$ 1

209 13 ſt. $(4t \dotplus 1).(4t \dotplus 3)$ l. $(4t \dotplus 3).(4t \dotplus 2)$

— 14 ſt. — θ.ae l. — θaa

S. 210.

Seite Zeile

210 15 ſt. $\sqrt{(1 - \frac{1}{2}uu)}$ l. $\sqrt{(1 - \frac{1}{2}u)}$

211 10 ſt. 21 ✠ 2 l. 2t ✠ 3

212 13 ſtatt 4t5 lies 4t ✠ 5

— 15 ſt. $\frac{1}{2}uu$ l. $\frac{1}{2}u$

— 18 ſt. $\frac{5u^3}{16.8.7}$ l. $\frac{3u^2}{8.4.5}$

213 13 ſt. $\alpha \dotplus \beta$ l. $(\alpha \dotplus \beta).t$

214 2 ſt. ζ l. $\zeta.u$

— 5 ſt. $\frac{1}{2}uu$ l. $\frac{1}{2}u$

— 9 ſt. R l. 4R

215 11 ſt. $\frac{1}{12}$ l. $\frac{u}{12}$

218 12, 13 lies: $a4^t$, $a4^{t+2}$, $a4^{t+4}$

224 13 ſt. 1, 1, 2 l. 2, 1, 3.

226 3 ſt. a^6 l. a^9

227 2 ſt. $m = 1$ l. $m = -1$

— 4 ſt. 65 l. 56.

232 ſind einige Druckfehler in den Zahlen leicht zu verbeſſern.

236 11 ſt. 1 Gr = 0,01 l. 1 Gr = 0,001

239 2 ſt. 286 l. 285.

240 17 ſt. $\frac{m}{n}$ 45° l. $\frac{m}{n} \cdot 90°$

248 5 ſt. gäbe l. geben

— 7 ſt. $\frac{1}{8} - a^2$ l. $\frac{1}{8}a^2$

249 12 ſt. 2x (1 ✠ ----) l. 2 (x ✠ ----)

250 3 ſt. II l. II.

Seite Zeile

250 vorletzte ſt. $\frac{q}{c}$ l. $\frac{q}{e}$

253 16 ſt. $\frac{1}{3}u^3$ l. $\frac{1}{3}u^2$

254 2 ſt. 322 l. 327

255 15 ſt. $\frac{\sqrt{-1}+y}{\sqrt{-1}+y}$ l. $\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$

256 12 ſt. $(x-\varepsilon)n$, $(x+\varepsilon)n$ l. $(x-\varepsilon)^n$, $(x+\varepsilon)^n$

— 4 ſt. $\frac{y-\varepsilon}{y-\varepsilon}$ l. $\frac{y-\varepsilon}{y+\varepsilon}$

— 13 ſt. — Cot E l. — Cot F

257 17 ſt. $C\varepsilon$ l. $C\varepsilon^3$

259 1 ſt. verwadeln l. verwandeln.

263 letzte ſt. $2\pi\sqrt{-1}$ l. $2.2\pi\sqrt{-1}$

268 7 ſt. $\frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$ (333) l. $\frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$ (333. II.)

— 8 ſt. $\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}+x}$ l. $\frac{\sqrt{3}+\varepsilon}{\sqrt{3}-\varepsilon}$

271 10 ſtatt x lies a

— 21 ſt. $+a^{2n}$ l. $\pm a^{2n}$

272 13 ſt. nnc l. nncc

273 10 ſt. $=1.2\cdots$ l. $-1.2\cdots$

276 letzte
277 1
— 4 } ſt. $\left(\frac{c}{4}\right)^{2n}$ l. $\left(\frac{c^2}{4}\right)^n$

S. 278.

Druckfehler in der Käſtn. Anal. d. Unendl. 495

Seite Zeile

278 12 ſt. $\frac{1-4a^2}{9c^2}$ l. $1-\frac{4a^2}{9c^2}$

279 10 ſt. $a\sqrt{1}.S$ l. $a\sqrt{-1}.S$

280 1 ſt. e^x-e^{-x} l. $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

— 16 ſt. 342 l. 341. V.

— 17 ſt. $l(4-\frac{1}{25})$ l. $l(1-\frac{1}{25})$

281 14 } ſt. $-\frac{m^2}{9n^2}$ l. $\frac{-m^2}{16n^2}$
— 16 }

289 2 ſtatt 558 lies 358

294 1 ſt. $1-z^2$ l. $1-2z$

295 8 ſt. n l. n — 1

296 9 ſt. $(p-qz)$ l. $(p-qz).S$

300 13 ſt. $q-qz$ l. $p-qz$

302 9 ſt. $R-DZ$ l. $\frac{R-DZ}{p-qz}$

307 19 ſt. $a-a\sqrt{ax}$ l. $a-\sqrt{ax}$

308 1 ſt. $-\frac{7}{8}$ l. $-\frac{9}{8}$

— 3 } ſt. $\frac{1}{4a}$ l. $\frac{1}{8a}$
— 4 }

311 14 ſt. $-\frac{1:ly}{y^n}$ l. $\frac{-1:ly}{y^n}$

315 17 ſt. $=1$ l. $x=1$

320 1 ſt. $\frac{y}{z}$ l. $\frac{y}{Z}$

S. 329.

Seite Zeile

329 2 ſt. $\frac{2x+1}{\pi}$ l. $\frac{2x+1}{n}$

331 7 ſt. $2x+$ l. $2x+1$

332 20 ſt. $\mathrm{Cof}\frac{2}{3}+\pi$ l. $\mathrm{Cof}\frac{2}{3}\pi+$

333 letzte ſt. r l. r^x

334 1 ſt. $\sin\varphi$ l. $\sin x.\varphi$

335 1 ſt. $\sqrt{}-\sin\varphi$ l. $\sqrt{}-1.\sin\varphi$

337 8 ſt. $L+l$ l. $L=l$

342 vorletzte ſt. 399. l. 398. II.

344 6 ſt. $x\frac{\eta\mu}{v}$ l. $x\frac{n\mu}{v}$

347 10 ſt. weil man l. weil

— 16 ſt. x^{n-1} l. $x^{n-1}.dx$

348 10 ſt. $\frac{x^{m+1-n}.u^p}{(m+1).a}$ l. $\frac{x^{m+1-n}.u^{p+1}}{(m+1-n).a}$

351 2 ſt. $\frac{m+1}{m+1}$ l. $\frac{m+1}{m+2}$

359 11 ſt. 407. l. 411.

360 4 v. unt. ſt. IK l. LK

— 21 ſt. $\alpha=1$ l. $\alpha=4$

— 22 ſt. α^3 l. α^8

363 2 v. u. ſt. adx l. ady

— 3 ſt. $\frac{1}{n}$ l. $\frac{1}{n-1}$

366 3 ſt. $N\frac{a}{\omega}+\frac{x+pz}{\omega}$ l. $N=\frac{a}{\omega}+\left(\frac{x+p}{\omega}\right).z$

S. 367.

Seite Zeile

367 12 ſt. auf l. auch

368 letzte ſt. z l. z^x

373 1 ſt. 2aBx l. 2abBx

— 2 ſt. axdy l. axdy =

376 1 ſt. $\delta - 1 \dotplus x$ l. $(r \dotplus 1).\delta - 1 \dotplus x$

— 3 ſt. $y^\varepsilon x^\varkappa dy$ l. $y^\varepsilon x^\varkappa$

— 7 ſt. $\varkappa^\tau$ l. x^τ

420 2 ſt. $Ax^{2\alpha}$ l. $AAx^{2\alpha}$

ſt. $2AD^{\alpha} \dotplus \delta$ l. $2ADx^{\alpha} \dotplus \delta$

421 7 ſt. ſo ſo l. ſein ſoll, ſo

423 vorletzte ſt. — B; 2 l. — B : 2

429 8 ſt. $\frac{1}{2}e$ l. $\frac{1}{2}.\frac{1}{e}$

432 3 ſt. 483 l. 478

ſt. Qx l. Qy

— 4 ſt. 484 l. 479

— 20 ſt. δy3 l. δy;

436 1 ſt. $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ l. $\left(\frac{dV}{dx}\right)$

444 2 ſt. γ l. V

446 6 ſt. $3x^3y^2$ l. $3x^2y^2$

447 18 ſt. Q.dx l. Q.dy

452 1 ſt. 2CM ✢ MS l. 2CM ✢ NS

— 5 ſt. 2NM l. 2CM

— 7 ſt. 204. l. 205.

455 vorl. ſt. VI. l. VII.

456 1 ſt. EM l. CM

Seite	Zeile	
456	3 v. unt.	ſt. 505. l. 505. VI.
467	16	ſt. in N l. in M
470	11	ſt. MCM l. MCN
484	3	ſt. $x = u$ l. $x = u^4$
490	leßte.	ſt. 542. II. l. 518. II.
491	2	ſt. ds^2 l. ds^3
—	12	ſt. $ududx$ l. $ududdx$
493	5	ſt. $\frac{PM^2}{DP}$ l. $\frac{PM^2}{CP}$
495	2	ſt. 27. Fig. l. 28. Fig.
507	4	ſt. $\sqrt{(4rr - 2r)}$ l. $\sqrt{(4rr - 2rx)}$
511	21	ſt. APE l. APF
515	6 v. unt.	ſt. Abwink. l. Abwick.
517	leßte	ſt. E l. C
518	leßte	ſt. EC; EB ✠ LC l. EC:(EB ✠ LC)

Anmer-

Anmerkungen

zu

Hubens analytischer Abhandlung

von den

Kegelschnitten.

Vorerinnerung.

Um die sämmtliche Anmerkungen zu Hubens Abhandlung beisammen, und nicht am Anfange und Ende dieser Erläuterungen getrennt zu haben; sind die wenige Blätter, die ich schon oben aus diesen Anmerkungen hatte beidrucken lassen, hier beibehalten worden. Warum ich diese Sätze, die eigentlich nur hierher gehören, oben erwähnt hatte, darüber habe ich mich in der Vorrede zum vorigen Stück erklärt, und man wird mir deßwegen den kleinen Fehler, eine Sache zweimal gesagt zu haben, leicht verzeihen können.

Anmerkungen

zu

Hubens analytischer Abhandlung

von den

Kegelschnitten.

Einleitung.

Es enthält diese Einleitung lauter allgemeine Sätze, die sich durch ihre Verbindung mit dem Folgenden unentbehrlich machen. Jeder, der eine algebraische Abhandlung von krummen Linien lesen will, muß die eigentliche Beschaffenheit der **veränderlichen** und **beständigen** Grössen und die einmal eingeführte Art, sie durch Buchstaben zu unterscheiden, kennen; er muß im Stande sein, gleich bei dem ersten Anblick einer Gleichung zu beurtheilen, von welchem **Grad** sie seie? er muß von den Gleichungen für krumme Linien, und der Art, ihre Natur durch Gleichungen, besonders vom **zweiten Grad** auszudrucken, einen deutlichen Begrif haben. Alles dieses zeigt daher der Verfasser in dieser Einleitung §. 1 – 4; und erklärt die Sache

noch durch ein besonderes Beispiel im 5ten §. so deutlich, daß ich nichts dabei zu erinnern finde. Den folgenden 6ten §. möchte indessen Mancher schon erläutert wünschen, und ich mache deswegen mit diesem den Anfang.

§. 6.

Es sei AL die Abscissen- und AC die Applikatenaxe; (Fig. 18. u. 19.) es sei ferner die Gleichung, welche man bei diesen Axen für die Linie ED erhält, vom nten Grad; so läßt sich diese Linie ED nie durch eine andere Gleichung, als durch eine vom nten Grad, ausdrucken, man mag die Axen ändern, wie man will. Denn man nehme statt der Applikatenaxe AC die GF, und statt AL die FK. Von der Axe AL nehme man ein beliebiges Stück AB zur Abscisse, und mache der AC die Ff und IH; der AS die FI und MH gleichlaufend. Nimmt man nun AB zur Abscisse, so ist die dazu gehörige Applikate die der AC parallele und an ED reichende Linie BD. Ebenso muß die zu ebendem Punkt D gehörige Applikate, auf der neuen Abscissenlinie FK genommen, mit der neuen Applikatenaxe GF parallel laufen, und zwar in ebenden Punkt D. Zieht man also DH der GF gleichlaufend, so ist dieses die zu D gehörige Applikate, auf der neuen Axe FK genommen, und FH ist die dazu gehörige Abscisse. Hieraus erhellet, daß in den Dreiecken DMH, FHI, die Verhältnis der Seiten gegen einander beständig ist, was auch AB für eine Grösse bekommt. Denn man verlängere AL bis in l, einen unbestimmten Punkt, und nehme AB = Ab, so ist db ∥ AC

AC ∥ DB; Mh ∥ Al ∥ MH; Ih ∥ AC ∥ IH; dh ∥ GF ∥ DH; folglich MDH = Mdh; MHD = Mhd; DMH = dMh, und daher DM : MH = dM : Mh; DM : DH = dM : dh; DH : DM = dh : dM. Da man nun den Punkt b ebensowohl in R oder in jedem andern Punkt hätte nehmen können, so stehen offenbar die Seiten der genannten Dreiecke in einer beständi-

gen Verhältnis. Nun setze man $\frac{HM}{DH} = c$;

$\frac{DM}{DH} = f$; $\frac{FI}{FH} = d$; $\frac{HI}{FH} = e$; so ist DH : HM = 1 : c; DH : DM = 1 : f; FH : FI = 1 : d; FH : HI = 1 : e. Setzt man ferner jede der neuen Abscissen FH, Fh, u. s. w. = z, und die dazu gehörigen Applikaten, als DH, dh = u; so ist, vermöge der Verhältnis DH : HM = 1 : c, HM = BL = DH. c = cz. Aus der Verhältnis FH : FI = 1 : d, folgt FI = fL = dFH = dz; da ferner DH : DM = 1 : f und FH : HI = 1 : e, so ist DM = f. DH = fu, und HI = MN = e. FH = ez. Nun ist AB = Af + fB = Af + fL — BL, und BD = DM + MB = DM + BN — MN = DM + Ff — MN, oder, wenn man statt Af, Ff; a, b; setzt, x = Af + fL — BL = Af + fI — BL = a + dz — cu, und y = DM + Ff — MN = fu + b — ez. Dieß sind also die allgemeine Werthe von x, y, wenn die beiden Axen AC, AL verändert werden. Für dergleichen Ver-

änderung giebt es nun verschiedene Fälle. Wird I.) blos die Lage der Applikatenaxe AC verändert, so ändert sich nur der Winkel CAB, indem z. B. die CA in εA oder γA fällt. Solchergestalt hat man statt der neuen Applikatenaxe Ef die εA, γA, und es ist offenbar, daß bei einer solchen Veränderung der Punkt F in A liegen bleibt. Fällt aber F in A, so wird Ff und IL, mithin auch IH und MN = o, und man erhält auf diese Art x = o ✠ dz — cu. Da aber IH = o, folglich der Punkt I in H fällt, so ist FI = FH, also $d = \frac{FI}{FH} = 1$; und x = dz — cu = z — cu; y wird = o ✠ fu — MN = o ✠ fu — o = fu. Es ist also

I. x = z — cu;
y = fu;

Es ist für sich klar, daß ebendas gilt, wenn II.) blos die Lage der Abscissenaxe verändert wird. Also auch

II. x = z — cu
y = fu;

Lauft III.) die neue Abscissenaxe mit der vorigen AL parallel, so fällt diese in die Linie FI, und es wird IH = MN = o, und $d = \frac{FH}{FI} = 1$, folglich

III. x = a ✠ z — cu;
y = b ✠ fu; Fig. 19.

Verän-

Verändern IV.) beide Axen AC, AL, ihre Lage, doch so, daß sie noch in A zusammenstoßen, indem z. B. AC in AG und AL in AP fällt, so fallen die drei Punkte AFf bei A; N und B bei B und I u. L bei L zusammen, welches ich der Deutlichkeit wegen auch in der Figur bemerkt habe. Weil also überhaupt $x = a \pm dz - cu$ und $y = b \pm fu - ez$; so wird in diesem Fall, da $a = AF$ und $b = fF$ verschwinden,

IV.) $$x = dz - cu$$
$$y = fu - ez$$

In den übrigen Fällen bleibt $x = a \pm dz - cu$, und $y = b \pm fu - ez$. Indessen bleiben doch auch in den hier genannten Fällen diese Werthe von x und y richtig. Daß nämlich auch

$x = z - cu$; $x = a \pm z - cu$; $x = dz - cu$;

und

$y = b \pm fu$; $y = fu - ez$; $y = fu$;

sind besondere Fälle, für welche auch die anfangs gefundene allgemeine Gleichungen gelten, die aber dadurch in die erst erwähnten verwandelt werden, daß man sie einfacher ausdruckt, nachdem einige Grössen $= o$ worden sind.

Hat man also eine Gleichung von einem gewissen Grad für eine Linie, so darf man nur bei irgend einer Veränderung der Axen in diese Gleichung statt x und y ihre vorhin gefundene Werthe setzen, um bei diesen neuen Axen eine Gleichung für die gegebene Linie zu finden. Da nun die Werthe von x und y

allemal a ✠ dz — cu und b ✠ fu — ez sind, die noch von ebendem Grad, wie x und y sind, so erhellet, daß jede andere Gleichung, die man für ED bei andern Axen erhält, noch allemal von ebendem Grad sei, wie bei den Axen AG, AL. Es scheint zwar aus §. 2. als wären die Werthe a ✠ dz — cu und b ✠ fu — ez von einem höhern Grad als x und y. Dieses würde auch sein, wann c, d, e, f veränderliche Grössen wären. Da aber $c = \frac{HM}{DH}$;

$d = \frac{FI}{FH}$; $e = \frac{HI}{FH}$ und $f = \frac{DM}{DH}$, so erhellet, daß sie lauter beständige Grössen sind. Aus diesem allem folgt also, daß eine Gleichung für eine Linie, wie hier ED, immer von ebendem Grad bleibe, man mag die Axen ändern, wie man will.

Erstes Buch.

§. 6.

Man setze statt der Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, diese $y^2 + Ay + B = 0$, so ist

$$y^2 + Ay = -B;$$

$$y^2 + Ay + \tfrac{1}{4}A^2 = \tfrac{1}{4}A^2 - B;$$

$$y + \tfrac{1}{2}A = \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}A^2 - B)}$$

$$= \frac{-A \pm \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2}.$$

Also hat y diese zwei Werthe

$$1.)\ y = \frac{-A + \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2};$$

$$2.)\ y = \frac{-A - \sqrt{(A^2 - 4B)}}{2};$$

Diese beiden Werthe addirt geben die Summe der Applikaten $= -\frac{A}{2} - \frac{A}{2} = -A$; also ist die Summe der zu x gehörigen Applikaten $= -A$; Nun aber ist A die Summe der Coefficienten von y (§. 7. Einl.); um also die Summe der Applikaten zu bekommen, darf man nur die Summe der Coefficienten von y' mit ihren entgegengesetzten Zeichen nehmen.

nehmen. Fehlen nun in einer Gleichung vom zweiten Grad alle Glieder, die y' enthalten, so ist es ebensoviel, als wären alle solche Glieder, mithin auch die Summe der Coefficienten von y', $= 0$; aber die Summe der Coefficienten von y' ist der Summe der zu x gehörigen Applikaten gleich. Fehlen also in einer Gleichung vom zweiten Grad diejenige Glieder, welche y' enthalten, so ist die Summe der zu jedem x gehörigen Applikaten $= 0$; und es müssen also jedem x zwei gleiche entgegengesetzte Applikaten, wovon nämlich die eine positiv, die andere negativ ist, zugehören, weil ihre Summe anders nicht $= 0$ sein könnte. Folglich sind in solchem Fall die Abscissen, Abscissen eines Durchmessers, welcher eine solche Abscissenaxe ist, auf der zu jedem x zwo gleiche entgegengesetzte y gehören.

§. 7. Hier ergiebt sich eine Art, jeder Linie vom zweiten Grad einen Durchmesser zu ziehen, der mit den ihm zugeordneten Linien einen gegebenen Winkel macht. Gesetzt also, man soll der Linie ECL einen Durchmesser ziehen, der mit den ihm zugeordneten Linien den Winkel acb macht, so ziehe man durch die Punkte a, b die Linie ab und mache sie $= 1$, welches geschieht, wenn man ba auf ac dergestalt neigt, daß $\sin bac = bc \times \sin c$ wird. Denn es ist alsdann

$$\sin bac : bc = \sin c : 1 = \sin c : ab.$$

Man darf also nur in den Tafeln einen Sinus auffuchen, der $= bc \times \sin c$, und den dazu gehörigen Winkel nehmen, so hat man den Winkel

bac.

bac. Man setze ferner bc = ½a. Ist nun ECL die gegebene Linie, so ziehe man nach Belieben eine Abscissenaxe AF, es gilt doch allemal für die Abscissen und Applikaten die Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o$ (§. 6. Einl.). Auf den nach Gefallen genommenen Anfangspunkt der Abscissen setze man Applikatenaxe unter dem Winkel abc, daß also aAF = abc wird. Man mache nun das Dreieck ABM dem abc gleich, nämlich AB = ab = 1; BM = bc = ½a, und den Winkel ABM = abc, welches man erhält, wenn man BM = bc mit der Applikatenaxe aA gleichlaufend zieht. Nun ziehe man in der gegebenen Linie ECL die der aA parallelen el, EL; &c. und theile die el in zwo gleiche Theile z. B. in h, und mache AD = hm, welches = ½b sein soll. Durch den Punkt D ziehe man mit AG eine Parallele, oder man ziehe durch die Punkte D und H eine grade Linie DH, so ist diese der verlangte Durchmesser, zu dem die Applikaten ch, EH &c. unter dem gegebenen Winkel acb geordnet sind. Denn es ist allemal DHE = AMB = acb der gegebene Winkel. Daß aber HE allemal = ½EL sei, erhellt geometrisch also: Die Linie el hat man in zwei gleiche Theile eh, hl getheilt, hieraus folgt

Ch : hl = Ch : he; aber es ist

Ch : he = CH : HE; folglich

Ch : hl = CH : HE; da nun auch

Ch : hl = CH : HL, so ist

$$CH : HE = CH : HL \text{ und daher}$$

$$HE = HL;$$

Da man nun die Linie EL ziehen kann, wo man will, und nach dem Beweis doch allemal $HE = HL$ sein muß, so erhellet, daß die grade Linie DH jede der el Paralle EL in zwei gleiche Theile theilt, oder daß sie ein Durchmesser ist (§. 5.) zu dem die Applikaten eh, EH unter dem gegebenen Winkel acb $=$ AMB $=$ Dhe $=$ DHE &c. geordnet sind, und also der verlangte Durchmesser ist. Man kann dieses aber auch aus der Gleichung $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o$ beweisen. Denn man nehme EH als die zur Abscisse DH gehörige Applikate an, so ist EF die Applikate von AF. Setzt man nun $GH = \frac{1}{2}b$; $BM = \frac{1}{2}a$; $AF = x$; $AB = 1$; $AM = m$; jede Abscisse he, $HE = u$; jede Applikate Dh, $DH = z$, so ist

$$AF : FG = AB : BM \text{ folglich}$$

$$AF : AB = FG : BM \text{ oder}$$

$$FG : \tfrac{1}{2}a = x : 1, \text{ und}$$

$$FG = \tfrac{1}{2}ax$$

Weil nun $AB = 1$; $AM = m$, so ist $AB : AM = 1 : m$ es ist ferner $u = HE = HG + GF + FE = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}ax + y$; $y = u - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ax$. Da ferner $AF : AB = AG : AM = DH : AM$, und $AF = x$; $AM = m$, $DH = z$, so ist

$$x : AB = z : AM, \text{ folglich } \frac{z \cdot AB}{AM} = x. \quad \text{Da}$$

nun

nun $AB : AM = 1 : m$, so ist $x = \frac{z}{m}$. Nun ist also der Werth von x und y bei dieser Linie vom zweiten Grad völlig bestimmt, denn man hat für $y, u - \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} a x$, und für x den Werth $\frac{z}{m}$.

Man erhält also für die gegebene Linie ECL eine ganz bestimmte Gleichung, wenn man in der allgemeinen $y^2 + axy$ &c. $= 0$ für x und y die gefundenen Werthe setzt. Alsdann ist nämlich

$$(u - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} ax)^2 + ax \cdot (u - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} ax) +$$

$$b \cdot (u - \tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} ax) + \frac{cz^2}{m^2} + \frac{dz}{m} + e = 0;$$

also $u^2 + \frac{1}{4} b^2 + \frac{1}{4} a^2 x^2 - bu - aux + \frac{1}{2} abx$

$$+ aux - \tfrac{1}{2} abx - \tfrac{1}{2} a^2 x^2 + bu - \tfrac{1}{2} b^2 -$$

$$\tfrac{1}{2} abx + \frac{cz^2}{m^2} + \frac{dz}{m} + e = 0; \text{ oder}$$

$$u^2 - \tfrac{1}{4} b^2 - \tfrac{1}{4} a^2 x^2 - \tfrac{1}{2} abx + \frac{cz^2}{m^2} + \frac{dz}{m}$$

$$+ e = 0; \text{ d. i.}$$

$$u^2 - \tfrac{1}{4} b^2 - \frac{a^2 z^2}{4m^2} - \frac{abz}{2m} + \frac{cz^2}{m^2} + \frac{dz}{m} + e = 0;$$

Hier stellt u die Applikaten he, HE &c. wie schon erinnert worden, vor; da sich nun in dieser letzten Gleichung kein Glied befindet, das u von der ersten Potenz enthält, oder, da in der Gleichung für die

Linie

Linie ECL alle Glieder fehlen, die u' enthalten, so muß (§. 6.) DH ein Durchmesser sein.

§. 11. Wird in der Gleichung

$$y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o;$$

$e = o$, so erhält man

$$y^2 + axy + by + dx + e = o; \quad D)$$

Nun ziehe man in dieser Linie der zweiten Ordnung die Axe Ab, (Fig. 34.) und nehme auf ihr einen willkührlichen Punkt B als den Anfangspunkt der Abscissen an, so ist BA der eine Werth von x. Ob nun von B nach b noch eine in die krumme Linie CAD reichende Abscisse liege, läßt sich folgendergestalt untersuchen. Für die Abscissen, die mit ihren Endpunkten an die krumme Linie reichen, wird $y = o$. Um also die Werthe für solche x zu finden, deren Endpunkte in der krummen Linie liegen, darf man nur in der allgemeinen Gleichung D)

$$y^2 + axy - - - - = o$$

$y = o$ setzen. Solchergestalt verschwinden die drei ersten Glieder in (D), und man erhält

$$dx + e = o;$$

und hieraus ergiebt sich

$$x = -\frac{e}{d};$$

daß es also nur ein einziges solches x giebt, welches mit seinem Endpunkt in die Linie vom zweiten Grad fällt. Dieß giebt zu erkennen, daß in dem Fall,

da

da $c = o$ ist, die krumme Linie CAD von ihrer Axe Ab nirgends weiter geschnitten werden könne, als in A. Hieraus ergiebt sich zugleich noch ein anderer Satz. Weil nämlich $x = -\frac{e}{d} = AB$ (Fig. AA) so ist

$$dx + e = dx + d\frac{e}{d}$$

$$= dx + d.(-AB)$$

$$= d(x - AB)$$

und

$$y^2 + axy + by + dx + e = y^2 + axy + by + d.(x - AB) = o;$$

setzt man nun für x wieder einen bestimmten Werth, z. B. AP, so bekommt man für y wiederum die beiden Werthe PM, PN, und man hat statt $y^2 +$ $axy + by + d.(x - AB)$,

$$y^2 + ay \times AP + by + d \times (AP - AB);$$

Aber AB ist der AP entgegengesetzt, also negativ, und $AP - AB$ ist hier $= AP - (-AB) =$ $AP + AB = PB$; folglich

$$y^2 + axy + by + d.(AP - AB) = y^2 + axy + by + d.PB;$$

Nun ist aber hier d.PB das, was B (Einl. §. 7.) ist, mithin ein Produkt der negativ genommenen Wurzeln. Aber die Werthe von y, d. i. PM und PN sind die Wurzeln der Gleichung, folglich ist

$(-PM).(-PN) = PM \times PN = d \times PB.$

und wenn man $x = AQ$ setzt, so ist wie im vor. §.

$$mQ \times Qn = d \times BQ;$$

also ist

$$(PM \times PN) : (d \times PB) = (mQ \times Qn) : (d \times BQ), \text{ oder}$$

$$(PM \times PN) : (mQ \times Qn) = (d \times PB) : (d \times BQ);$$

$$= PB : BQ;$$

Dieses alles gilt nämlich für den Fall, da $c = o$; In solchem Fall also verhalten sich allemal die Rechtecke der Applikaten, die zu einer Abscisse gehören, gegen einander, wie die zugehörigen Abscissen. Gesetzt also, es sei in einer Linie der zweiten Ordnung eine beliebige Abscisse $= x$, eine andere u, die beide zu x gehörigen Ordinaten y, z; die beiden zu u gehörigen Φ, Ψ, so ist, für $c = o$,

$$yz \cdot \Phi\Psi = x : u.$$

Ist nun die Abscissenaxe ein Hauptdurchmesser, so wird $y = z$, $\Phi = \Psi$, folglich

$$y^2 : \Phi^2 = x : u$$

oder die Abscissen verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Ordinaten.

Das zweite Buch.

Von den Kegelschnitten überhaupt.

§. 1.

Der 3te §. 1. lehrt, daß eine Linie vom zweiten Grad aus graden zusammengesetzt sei, wann sich ihre Gleichung in rationälle Theiler zerfällen läßt. Um nun zu unserer Absicht eine bequemere Gleichung für die Linien vom zweiten Grad, als die obige allgemeine ist, zu finden, so setze man

$$c = \tfrac{1}{4}a^2 - m^2$$

$$d = \tfrac{1}{2}ab - n, \text{ und}$$

$$e = \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p$$

Da jeder dieser Ausdrücke wegen den allgemeinen Grössen m, n, p noch ebenso allgemein ist, wie c, d, e, so erhellet, daß die neue Gleichung, die man erhält, indem man in die obige Gl. statt c, d, e die hier genannte Ausdrücke setzt, ebenso allgemein bleiben müsse, wie jene. Die Gleichung, welche man dadurch erhält, ist folgende:

$$y^2 \mp axy \mp by \mp (\tfrac{1}{4}a^2 - m^2)x \mp (\tfrac{1}{2}ab - n)x$$

$$\mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{u^2}{4m^2} \mp p = 0;$$

$$= y^2 \mp (ax \mp b)y \mp cx^2 \mp dx \mp e$$

also

$$y^2 \mp (ax \mp b)y = -cx^2 - dx - e;$$

$$y^2 \mp (ax \mp b)y \mp \frac{a^2x^2 \mp 2abx \mp b^2}{4} =$$

$$\frac{a^2x^2 \mp 2abx \mp b^2}{4} - cx^2 - dx - e;$$

$$y \mp \frac{ax \mp b}{2} = \sqrt{\left(\frac{a^2x^2 \mp 2abx \mp b^2}{4} - cx^2 - dx - e\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2x^2 \mp 2abx \mp b^2}{4} - \left(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2\right)x^2 - \left(\tfrac{1}{2}ab \mp n\right)x - \left(\tfrac{1}{4}b^2 \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2x^2 \mp \tfrac{1}{2}abx \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}a^2x^2 \mp m^2x^2 - \tfrac{1}{2}abx \mp nx - \tfrac{1}{4}b^2 \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)}$$

$$= \sqrt{\left(m^2x^2 \mp nx \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)}$$ Folglich

$$y = \frac{-ax - b}{2} \mp \sqrt{\left(m^2x^2 \mp nx \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)}$$

$y =$

Dieses

Dieses ist also der Werth von y, und auf folgende Art läßt sich prüfen, ob dieser rational, oder irrational sei. Da nämlich

$$\sqrt{\left(m^2x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2}\right)} = mx + \frac{n}{2m};$$

so ersieht man, daß $\sqrt{\left(m^2x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2}\right)}$ rational ist. Man setze nun der Kürze wegen $m^2x^2 + nx + \frac{n^2}{4m^2} = \varphi^2$, und π stelle jede andere Grösse vor, so ist offenbar, daß $\varphi^2 + \pi$ nicht nothwendig irrational sein müsse. Denn es sei z. B. $\pi = 2\varphi + 1$, so ist $\varphi^2 + \pi = \varphi^2 + 2\varphi + 1$ also ein vollkommenes Quadrat. Ist $\pi = -2\varphi + 1$, so wird $\varphi^2 + \pi = \varphi^2 - 2\varphi + 1$ wieder ein Quadrat, und also $\sqrt{(\varphi^2 + \pi)}$ rational. Ueberhaupt kann $\varphi^2 + \pi$ nur in solchen Fällen zu einem Quadrat werden, da $\pi = 2n\varphi + n^2$ oder $= -2n\varphi + n^2$. Und ebenso kann $\varphi^2 - \pi$ nur in solchen zu einem Quadrat werden, da $\pi = 2n\varphi - n^2$ oder $= -2n\varphi - n^2$ wie aus der allgemeinen quadratischen Formel erhellet. Im ersten Fall also, da nämlich $\varphi^2 + \pi$ ein Quadrat ist, wird

$$\varphi^2 - \pi = \varphi^2 - 2n\varphi - n^2 \text{ oder}$$

$$\varphi^2 - \pi = \varphi^2 + 2n\varphi - n^2;$$

daß also in dem Fall, da $\varphi^2 + \pi$ ein Quadrat ist, $\varphi^2 - \pi$ keines sein kann, weil alsdann n^2 das

Zeichen — erhält, welches bey einem Quadrat nicht möglich ist.

Im andern Fall, da $\varphi^2 - \pi$ ein Quadrat ist, wo also $\pi = 2n\varphi - n^2$ oder $= -2n\varphi - n^2$, wird

$$\varphi^2 \mp \pi = \varphi^2 \mp 2n\varphi - n^2 \text{ oder}$$

$$\varphi^2 \mp \pi = \varphi - 2n\varphi - n^2,$$

welches wieder keine Quadrate sind.

Hieraus erhellet, daß, wann $\varphi^2 \mp \pi$ ein Quadrat ist, $\varphi^2 - \pi$ keines sein kann, und wann $\varphi^2 - \pi$ eins ist, $\varphi^2 \mp \pi$ keins sein kann, oder daß $\varphi^2 \mp \pi$ und $\varphi^2 - \pi$ nicht zugleich Quadrate sein können, und daß demnach $\sqrt{(\varphi \mp \pi)}$ allemal irrational ist, so lang π noch eine wirkliche Grösse ist. Es muß also auch

$$\sqrt{\left(m^2x^2 \mp nx \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)}$$

so lange irrational bleiben, bis $p = 0$ wird. Solang also p noch irgend eine Grösse ist, kann man die Gleichung:

$$y^2 \mp axy \mp by \mp \left(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2\right)x^2 \mp \left(\tfrac{1}{2}ab - n\right)x \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0; \quad (B)$$

nicht in rationälle Theiler zerfällen, und daß also in dem Fall, da p in $= 0$, auch die obige Gleichung keine aus graden zusammengesetzte, sondern eine krumme Linie ausdrucke.

§. 2. Daß durch fünf Punkte allemal ein Kegelschnitt bestimmt ist, erhellet daraus, weil man durch fünf Punkte für den dadurch zu bestimmenden Kegelschnitt fünf Gleichungen erhält, in denen sich nur fünf unbekannte Grössen befinden. Dieß wird ein Beispiel deutlicher aufklären. Es seien nämlich die fünf Punkte IBEFC gegeben, so muß die Lage derselben so beschaffen sein, daß niemalen drei von Ihnen in grader Linie liegen, weil sonsten eine grade Linie den durch diese drei Punkte gehenden Kegelschnitt *in* drei Punkten schnitte, welches nicht angeht. (§. 4. I.) Haben nun die gegebene fünf Punkte die genannte Lage, so nehme man zwischen zweien beliebigen Punkten von ihnen, als B und C die Abscissenaxe an, und durch einen der übrigen Punkten setze man auf die Abscissenaxe die Axe der Applikaten z. B. DEK. Also ist hier D der Anfangspunkt der Abscissen; B und C sind die Endpunkte, durch welche der Kegelschnitt geht. Soll nun $y = o$ werden, so muß es nach (Einl. §. 4.) in die Endpunkte B und C fallen, und die zu $y = o$ gehörige Abscissen müssen nun nothwendig DB und DC sein. Man setze nun in der Gleichung (B) $y = o$, so verschwinden alle Glieder, welche y enthalten, und es bleibt

$$(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2)x^2 \mp (\tfrac{1}{2}ab - n)x \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o; \text{ oder}$$

$$o = x^2 \mp \frac{(\frac{1}{2}ab - n)x}{\frac{1}{4}a^2 - m^2} \mp \frac{\frac{1}{4}b^2 - \frac{u^2}{4m^2} \mp p}{\frac{1}{4}a^2 - m^2} \quad (C.)$$

Man setze §. 7. Einl. $A = \frac{\frac{1}{2}ab - n}{\frac{1}{4}a^2 - m^2}$; $B = \frac{\frac{1}{4}b - \frac{n^2}{4m^2} \mp p}{\frac{1}{4}a^2 - m^2}$; so ist, wenn man statt der Wurzeln der Gleichung (C.) nämlich statt DB, DC; α, β setzt,

$$\text{I. } \alpha \mp \beta = \frac{\frac{1}{2}ab - n}{\frac{1}{4}a^2 - m^2};$$

$$\text{II. } \alpha\beta = \frac{\frac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p}{\frac{1}{4}a^2 - m^2};$$

Da D der Anfangspunkt der Abscissen ist, so muß, wenn $x = o$ ist, auch der Endpunkt derselben in D sein. Folglich ist die zu $x = o$ gehörige Applikate $y = DE$. Setzt man nun in der Gleichung (B) $x = o$, so verschwinden alle Glieder, und man erhält dadurch, wenn man $DE = \omega$ setzt,

$$\text{III. } \omega^2 \mp b\omega \mp \frac{b^2}{4} - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = o;$$

Man ziehe ferner aus I und F die Applikaten IH, FA auf die Abscissenaxe HC, und setze $DH = \gamma$, $DG = \varepsilon$, $IH = \varphi$, $FG = \psi$; so muß für $x = \gamma$ die Applikate y die mit DE parallele Linie IH sein, und ebenso ist, für $x = \varepsilon$, $y = \psi$. Wenn man nun in der Gleichung (B) statt y, φ; und statt x, γ setzt, so ergiebt sich

IV.

$$\text{IV. } \varphi' \mp a\gamma\varphi \mp b\varphi \mp \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \mp (\tfrac{1}{2}ab - n)\gamma \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0;$$

Und wenn man statt y, ψ und statt x, ε in (B) setzt, so kommt

$$\text{V. } \psi^2 \mp a\varepsilon\psi \mp b\psi \mp \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2 - m^2\varepsilon^2 \mp \tfrac{1}{2}ab\varepsilon - n\varepsilon \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0;$$

In allen diesen fünf Gleichungen kommen zusammen *nur* fünf unbekannte Grössen vor, die sich folgendergestalt finden lassen. Aus den vier lezten Gleichungen folgt:

$$\text{I. } \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \mp \alpha\beta(m^2 - \tfrac{1}{4}a^2) = \varphi^2 \mp \alpha\gamma\varphi \mp b\varphi \mp \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \mp \tfrac{1}{2}ab\gamma - n\gamma \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \mp p;$$

$$\text{II. } \omega^2 \mp b\omega \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \varphi^2 \mp \alpha\gamma\varphi \mp b\varphi \mp \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \mp \tfrac{1}{2}ab\gamma - n\gamma \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \mp p.$$

$$\text{III. } \varphi^2 \mp \alpha\gamma\varphi \mp b\varphi \mp \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \mp \tfrac{1}{2}ab\gamma - n\gamma \mp \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \psi \mp \alpha\varepsilon\psi \mp b\psi$$

$$\pm b\psi \pm \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2 - m^2\varepsilon^2 \pm \tfrac{1}{2}ab\varepsilon - ne \pm \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \pm p;$$

IV. $$\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \pm \alpha\beta(m^2 - \tfrac{1}{4}a^2) = \psi \pm \alpha\varepsilon\psi \pm b\psi \pm \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2 - m^2\varepsilon^2 \pm \tfrac{1}{2}ab\varepsilon - n\varepsilon \pm \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = \pm p;$$

Hieraus fließt:

$$\varphi^2 \pm \alpha\gamma\varphi \pm \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \pm \alpha\beta(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2) - n\gamma$$

I. $$\frac{\varphi^2 \pm \alpha\gamma\varphi \pm \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2 - m^2\gamma^2 \pm \alpha\beta(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2) - n\gamma}{\varphi \pm \tfrac{1}{2}a\gamma} = b;$$

II. $$\frac{\omega^2 - (\varphi^2 \pm \alpha\gamma\varphi \pm \tfrac{1}{4}a^2\gamma^2) \pm m^2\gamma^2 \pm n\gamma}{\varphi \pm \tfrac{1}{2}a\gamma - \omega} = b;$$

III. $$\frac{\alpha\beta.(m^2 - \tfrac{1}{4}a^2) - (\psi \pm \alpha\varepsilon\psi \pm \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2) \pm m^2\varepsilon^2 \pm n\varepsilon}{\psi \pm \tfrac{1}{2}a\varepsilon} = b;$$

Dieß giebt ferner

$$\frac{\omega^2 - (\varphi \pm \tfrac{1}{2}a\gamma)^2 \pm n\gamma}{\varphi \pm \tfrac{1}{2}a\gamma - \omega} \pm \frac{\gamma^2}{\varphi \pm \tfrac{1}{2}a\gamma - \omega} m^2 = \frac{-\alpha\beta.\tfrac{1}{4}a^2 - (\psi \pm \alpha\varepsilon\psi \pm \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2) \pm n\varepsilon}{\psi \pm \tfrac{1}{2}a\varepsilon}$$

$$\pm \frac{\alpha\beta \pm \varepsilon^2}{\psi \pm \tfrac{1}{2}a\varepsilon} m^2;$$

Also

Also I. $m^2 =$

$$\frac{\left(\psi \mp \frac{a\varepsilon}{2}\right).\left(\omega^2 - \left(\varphi \mp \frac{a\gamma}{2}\right)^2 \mp n\gamma\right) \mp \left(\varphi \mp \frac{a\gamma}{2} - \omega\right).\left(\alpha\beta.\frac{a^2}{4} \mp \psi \mp \alpha\varepsilon\psi \mp \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2 - n\varepsilon\right)}{(\alpha\beta \mp \varepsilon^2).(\varphi \mp \tfrac{1}{2}a\gamma - \omega) - \gamma^2.(\psi \mp \tfrac{1}{2}a\varepsilon)};$$

Der Nenner dieses Bruchs soll der Kürze wegen in der Folge B heissen.

Es folgt weiter aus den vorhergehenden Gleichungen:

$$\frac{(\varphi \mp \tfrac{1}{2}\alpha\gamma)^2 - n\gamma \mp \alpha\beta.\tfrac{1}{4}a^2}{\varphi \mp \tfrac{1}{2}a\gamma} - \left(\frac{\gamma^2 \mp \alpha\beta}{\varphi \mp \tfrac{1}{2}a\gamma}\right)m^2$$

$$= \frac{-\alpha\beta.\tfrac{1}{4}a^2 - (\psi \mp \alpha\varepsilon\psi \mp \tfrac{1}{4}a^2\varepsilon^2) \mp n\varepsilon}{\psi \mp \tfrac{1}{2}a\varepsilon}$$

$$\mp \frac{\varepsilon^2 \mp \alpha\beta}{\psi \mp \tfrac{1}{2}a\varepsilon}m^2;$$

mithin

II. $m^2 =$

$$\frac{(\psi \mp \tfrac{1}{2}a\varepsilon).\left((\varphi \mp \tfrac{1}{2}\alpha\gamma)^2 - n\gamma \mp \alpha\beta.\tfrac{1}{4}a^2\right) \mp \left(\frac{\alpha\beta a^2}{4} \mp \psi \mp \alpha\varepsilon\psi \mp \frac{a^2\varepsilon^2}{4} - n\varepsilon\right).(\varphi \mp \tfrac{1}{2}a\gamma)}{(\varepsilon^2 \mp \alpha\beta).(\varphi \mp \tfrac{1}{2}a\gamma) \mp (\gamma^2 \mp \alpha\beta).(\psi \mp \tfrac{1}{2}a\varepsilon)}$$

Dieses

Dieses Bruchs Renner heisse A, so ist

$$n = \left(\frac{B}{A}\left[(\psi + \tfrac{1}{2}a\varepsilon).\left((\varphi + \tfrac{1}{2}a\gamma)^2 + \alpha\beta.\tfrac{1}{4}a^2\right)\right.\right.$$
$$\left. + (\varphi + \tfrac{1}{2}a\gamma) \times \left(\frac{\alpha\beta a^2}{4} + \psi + \alpha\varepsilon\psi + \frac{a^2\varepsilon^2}{4}\right)\right]$$
$$- \frac{A}{B} \times \left[(\psi + \tfrac{1}{2}a\varepsilon).\left(\omega^2 - \left(\varphi + \frac{a\gamma}{2}\right)^2\right)\right.$$
$$+ \left(\varphi + \frac{a\gamma}{2} - \omega\right).\left(\frac{\alpha\beta a^2}{4} + \varphi + a\varepsilon\psi + \right.$$
$$\left.\left.\frac{a^2\varepsilon^2}{4}\right)\right]\Big) : \left(\frac{A}{B}\left[\gamma.(\psi + \tfrac{1}{2}a\varepsilon) - \varepsilon.\left(\varphi + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\frac{a\gamma}{2} - \omega\right)\right] + \frac{B}{A} \times \left[\gamma.\left(\psi + \frac{a\varepsilon}{2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\varepsilon.\left(\varphi + \frac{a\gamma}{2}\right)\right]\right)$$

Da nun $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \omega, \varphi$ und ψ lauter bekannte Grössen sind, so ist n durch lauter bekannte Grössen und durch a bestimmt. Setzt man also diesen Werth von n in die Gleichung für m^2, so erhält man m^2 durch a und gegebene Grössen. Dieser Werth von m^2 in die Gl. für b gesetzt, giebt ebenso b; setzt man endlich den Werth von b in die Gleichung für p, so erhält man auch p durch a und gegebene Grössen, und wenn man nun die Werthe von b, m und n

in

in die erste Gleichung $\frac{\frac{1}{2}ab - n}{\frac{1}{4}a^2 - m^2} = \alpha \pm \beta$ setzt,

so enthält dieselbe ausser a lauter bekannte Grössen, daß sich also a aus ihr finden läßt. Es wäre zu weitläuftig, die ganze Rechnung hier auszuführen. Hat man nun auch a gefunden, so sind a, b, m, n und p bekannt, und da

$$y = \frac{-ax-b}{2} \pm \sqrt{\left(m^2x^2 \pm nx \pm \frac{n^2}{4m^2} \pm p\right)}$$

so läßt sich nun zu jeder Abscisse, die man auf der Axe AC nimmt, die zugehörige Ordinate finden, und es lassen sich solchergestalt soviele Ordinaten verzeichnen, daß man durch deren Endpunkte den Kegelschnitt ziehen kann.

Wird $p = o$, so ist die durch die Gleichung B bestimmte Linie aus zwo graden zusammengesetzt (§. 3. I.), und diese zu bestimmen, wären nur vier Gleichungen nöthig, weil, wenn $p = o$, nur noch vier Grössen a, b, m, n, unbekannt sind. Also sind schon vier Punkte hinreichend, eine aus zweien graden zusammengesetzte Linie zu bestimmen, wie auch aus der gemeinen Geometrie erhellet.

Aus dem aber, was hier gesagt worden ist, folgt noch nicht, daß allemal zu Bestimmung eines Kegelschnitts 5. Punkte erfodert werden; es folgt nur dieses, daß es keinen Kegelschnitt gebe, den man durch mehr als fünf willkührlich angenommene Punkte ziehen könne. Ein Beispiel, da schon drei Punkte hinrei-

hinreichend sind, ist der Kreis. Siehe hievon §. 430. Anal. Käſtn.

§. 3. Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß sich durch fünf Punkte nur ein einziger Kegelschnitt verzeichnen läßt; man setze also, es sollen zwei Kegelschnitte einander in 5. Punkten durchschneiden, so hätte man 5. Punkte, durch die mehr als ein Kegelschnitt gezogen wäre; da nun dieses dem vorigen Satz zuwider ist, so können zwei Kegelschnitte einander offenbar in nicht mehr als vier Punkten durchschneiden.

Da also, wie im vor. §. erinnert worden, Kreise schon durch drei Punkte bestimmt werden, so folgt, daß zween Kreise einander nur in zwei Punkten durchschneiden können.

§. 4. Da $y = \frac{-ax-b}{2} \mp \sqrt{\left(m^2x^2 \mp nx \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p\right)}$, so wird für $m^2x^2 \mp nx \mp \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0$,

$$y = \frac{-ax-b}{2} \mp \sqrt{0}$$

daß also in dem Fall die beide Werthe von y völlig einerlei sind; es ist nämlich jeder $= \frac{-ax-b}{2}$.

Da also in solchem Fall die beiden Applikaten einander

der nicht mehr entgegengesetzt sind, indem jede $= \frac{-ax-b}{2}$, so müssen sie nothwendig zusammenfallen, welches nicht geschehen kann, als wann beide in einen Punkt zusammenfliesen.

Sollen z. B. die beiden Applikaten dE, de (Fig. 20.) einerlei Lage bekommen, so rücke man DE näher nach x zu, bis sie in x fällt, so fallen die beiden Applikaten dE, de in x zusammen, und die DE liegt nun in GF. Man sieht leicht, daß GF die krumme Linie nicht scheiden könne, weil das Stück von GF, das noch zwischen der krummen Linie liegt, nur ein einziger Punkt x ist; indessen hat also doch die GF den Punkt x mit der krummen Linie gemein, und dieses ist der Grund, warum sie eine Berührungslinie an x heißt.

§. 6. Man kann leicht einsehen, daß unter den angezeigten Umständen aus der Gleichung B folgende

$$\tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} \pm p = 0$$

entsteht. Alleln dieses sind blos beständige Grössen, die ihren Werth, den sie einmal haben, beständig behalten. Folglich machen die genannten Glieder unter allen Umständen die 0 aus, und hieraus läßt sich das folgende leicht schliesen.

§. 9. Wenn x jede Abscisse vorstellt, die man auf AN nimmt, so ist jedes $Ap = AP \pm M\pi$, folglich überhaupt $x = m \pm z$; und jedes zu Ap

gehörige

gehörige $p\,m = PM - \pi m$, oder überhaupt $y = n - u$; (ich sehe nicht, warum der Autor $y = n + u$ setzt.)

Diese Werthe von x und y setze man in die allgemeine Gleichung $y^2 + axy$ &c $= o$, so erhält man

$$u^2 - 2nu + n^2 - auz + anz - amu + amn - bu + bn + cz^2 + 2cmz + cm^2 + dz + dm + e = o;$$ (L.)

Da diese Gleichung in allen Fällen, was auch u und z für Werthe haben, richtig sein muß, so muß sie es auch für u und $z = o$ sein. Für diesen Fall aber fallen alle Glieder, in denen u oder z vorkommen, weg, und man erhält

$$u^2 + amn + bn + cm^2 + dm + e = o.$$ M.)

Weil nun hier lauter beständige Grössen vorkommen, so müssen sie in den übrigen Fällen noch eben den Werth haben, den sie auch für $u = z = o$ haben, und machen also in allen Fällen, u und z mögen Werthe haben, welche man will, die o aus. Die Gleichung L. bleibt daher noch richtig, wenn man in ihr die Glieder der Gleichung M. wegläßt. Dadurch aber erhält man

$$u^2 - 2nu - auz + anz - amu - bu + cz^2 + 2cmz + dz = o.$$ N.)

Setzt man $MQ : mq = 1 : \delta$, und $MQ : Qq = 1 : f$, so wird $f = \frac{Qq}{MQ}$ und $\delta = \frac{Mq}{MQ}$;

Nimmt

Nimmt man nun auf der Abscissenaxe $q\pi$, aus dem Anfangspunkt der Abscissen M, eine willkührliche Abscisse Mt, so ist, weil QM die Applikatenaxe ist, die aus t mit QM gleichlaufende Linie tm die zu Mt gehörige Applikate, und weil Qq mit πm, und QM mit tm parallel lauft, so ist $\pi = q$, und $Mtm = qMQ$; folglich $\triangle QqM \sim \triangle m\pi t$, und $\pi m : tm = Qq : MQ$; weil jedes u mit πm, und jedes s mit tm parallel laufen muß, so erhellet, daß die Verhältnis $\pi m : tm$ unveränderlich sei, daß also jedes u zu jedem $s = \pi m : tm$, mithin überhaupt

$$u : s = Qq : MQ, \text{ und}$$

$$u = s\frac{Qq}{MQ} = fs;$$

Da ferner $z = M\pi = t\pi - tM = t\pi - t$, und $t\pi : tm = qM : MQ$, folglich

$$t\pi = tm\frac{qM}{MQ} = s\delta; \text{ so folgt}$$

$$z = \delta s - t;$$

Diese Werthe von u und z in die Gleichung (N.) gesetzt, geben, wenn $t = o$,

$$f^2s^2 - 2nfs - af\delta s^2 + an\delta s - amfs - bfs + c\delta^2 s^2 + 2c\delta ms + d\delta s = o;$$

Aber für $t = o$ wird auch $s = o$, folglich ist

$$an\delta s - 2nfs - amfs - bfs + 2e\delta ms + d\delta s = o;$$

folglich auch

$$and - 2nf - amf - bf + 2cdm + d\delta = 0;$$

Es bleibt daher noch

$$(and - 2nf - amf - bf + 2cdm + d\delta)\, MQ = 0;$$

oder

$$(an + 2cm + d)\,\delta.MQ - (2n + am + b)\,f.\, MQ = 0;$$

Da also $\delta.MQ = Mq$, und $f.MQ = Qq$, so ist

$$(an + 2cm + d).Mq - (2n + am + b).Qq = 0;$$

oder auch nach dem Aut.

$$(2n + am + b)\,Qq - (an + 2cm + d)\,Mq = 0;$$

Hieraus folgt

$$\frac{Mq}{Qq} = \frac{2n + am + b}{an + 2cm + d};$$ Oder die beiden Linien Mq, Qq verhalten sich zu einander, wie $2n + am + b$ zu $an + 2cm + d$. Um also eine Tangente an M zu ziehen, so ziehe man eine Linie durch M der AN parallel, und nehme auf ihr $Mq = 2n + am + b$; durch q ziehe man mit Aa eine Linie gleichlaufend, und auf dieser nehme man $Qq = an + 2cm + d$, so stehen die Linien Mq und Qq in der gehörigen Verhältnis, und man darf nur aus Q nach M die Linie QMN ziehen, so hat man die verlangte Tangente QN.

Man

Man sieht leicht, daß man eben nicht allemal nöthig hat, $Mq = an + am + b$ und $Qq = an + 2cm + d$ zu nehmen, wenn man nur solche Linien nimmt, die in der Verhältnis $(2n + am + b) : (an + 2cm + d)$ stehen.

§. 10. Weil $Qq \# Mp$, $qM \# PN$ und QN eine grade Linie ist, so $PMN = Q$, $qMQ = N$, und überdas $q = MPN$, folglich $\triangle QqM \sim \triangle MPN$, und daher $Qq : qM = MP : PN$. Hieraus folgt nach gehöriger Substitution

$S = (2y^2 + axy + by) : (ay + 2cx + d)$, mithin

$2y^2 + axy + by = aSy + 2cSx + dS$; und

$y^2 + \frac{1}{2}axy + \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}aSy + cSx + \frac{1}{2}dS$; also

$y^2 + \frac{1}{2}axy + \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}aSy - cSx - \frac{1}{2}dS = 0$;

§. 11. $cx^2 + dx = 0$, giebt

$cx + d = 0$, folglich

$$1.)\ x = \frac{-d}{c};\quad A.)$$

Da aber auch die Gleichung $cx^2 + dx = 0$ statt findet, wann $x = 0$, so ist

$$2.)\ x = 0;$$

Nun ist

$-cSx - \frac{1}{2}dS = MF \asymp FN$ oder

$MF \asymp FN = -\frac{1}{2}dS - cS \asymp mF$

Aber wegen A.) ist

$$mG = -\frac{d}{c};\ \text{also}$$

$$\frac{c \asymp mG}{2} = \frac{d}{2}$$

mithin

$$\frac{cS \asymp mG}{2} = \tfrac{1}{2} d S.$$

Hieraus folgt

$$MF \asymp FN = cS \cdot \frac{mG}{2} - cS \cdot mF;$$

$$= cS \asymp \left(\frac{mG}{2} - mF\right); \text{ P.)}$$

Nun ist

$$mF \asymp FG : MF \asymp FN = 1 : c,$$

also

$$mF \asymp FG = \frac{MF \asymp FN}{c}; \text{ Q.)}$$

und aus P folgt

$$S \asymp \left(\frac{mG}{2} - mF\right) - \frac{MF \asymp FN}{c}; \text{ R.)}$$

Mithin geben Q und R

$$mF \asymp FG = S \asymp \left(\frac{mG}{2} - mF\right);$$

$= TF.(mc - mF)$ wenn $mc = cG$

oder N.) $mF \asymp FG = TF \asymp CF$, also

$$TF : mF = FG : CF,$$

mithin

mithin auch

$$\frac{TF - mF}{mF} = \frac{FG - CF}{CF}; \text{ d. i.}$$

$$mT : mF = mC : CF$$

oder

$$mT : Cm = mF : CF;$$

Aber aus N folgt

$$TF : FG = mF : CF,$$

Folglich

$$mT : Cm = TF : FG;$$

§. 12. Aus der Verhältnis

$$mT : Cm = TF : FG$$

folgt

$$(mT + Cm) : Cm = (TF + FG) : FG,$$

oder

$$(TF + FG) : (mT + Cm) = FG : Cm$$

mithin auch

$$\big((TF + FG) - (mT + mC)\big) : (mT + Cm) = (FG - mC) : mC$$

oder auch

$$(mT + mC) : mC = \big((TF + FG) - (mT + mC)\big) : (FG - mC)$$

d. i.

$$TC : mC = CG : (FG - CG);$$

oder

$$TC : mC = mC : CF;$$

§. 13. Aus der Verhältnis §. 11.

$$mT : Cm = TF : FG;$$

folgt $Cm \times TF = mT \times FG;$

oder $\frac{1}{2} mG \times TF = mT \times FG;$

also $mG \times TF = 2mT \times FG$ L.)

Es ist ferner

$$mG = mF + FG$$

und $TF = TG - FG,$

mithin

$$mG \times TF = (mF + FG) \times (TG - FG);$$
$$= mF \times TG - mF \times FG + FG \times TG - FG \times FG;$$
$$= mF \times TG + (TG - (mF + FG))\, FG;$$
$$= mF \times TG + (TG - mG)\, FG.$$

d. i.

$mG \times TF = mF \times TG + Tm \times FG;$ M.)

Nun aber ist

$$mT : Cm = TF : FG;$$

also $Cm \times TF = mT \times FG;$

oder $\frac{1}{2} mG . TF = mT \times FG,$

Dieser Werth von $mT \times FG$ in die Gleichung M gesetzt, giebt

mG

$$mG.TF = mF \times TG + \tfrac{1}{2}mG \times TF;$$

mithin

$$(mG.TF) - \tfrac{1}{2}mG.TF = mF.TG;$$

Folglich

$$\tfrac{1}{2}mG.TF = mF.TG$$

und $$mG.TF = 2mF.TG;$$

Dieser Werth von $mG.TF$ in L gesetzt, giebt

$$2mF \times TG = 2mT \times FG, \text{ oder}$$

$$mF \times TG = mT \times FG$$

Mithin

$$TG : Tm = FG : mF;$$

§. 14. Es ist überhaupt für jeden Werth von c

$$mG = -\frac{d}{c} \text{ (§. 11.)}$$

Wird nun $c = 0$, so ist $mG = -\frac{d}{0} = \infty$.

Der Punkt also, wo die Axe der krummen Linie ausser m begegnet, ist von T unendlich weit entfernt, oder es ist nirgends.

Folglich begegnet in dem Fall, da $c = 0$, die Axe TF der krummen Linie nur in den einzigen Punkt m. Da ferner $-cfx - \frac{1}{2}dS = MF \times FN$, so wird für $c = 0$, $-\frac{1}{2}dS = MF \times FN$, oder

$$\tfrac{1}{2}dS = MF \times FN;$$

weil hier das Zeichen — keinen Einfluß hat. Es ist also, weil für $c = o$, $MF \times FN = d \cdot mF$ nach (§. 11. I.) auch $\frac{1}{2} dS = d \cdot mF$, oder $\frac{1}{2} S = mF = \frac{1}{2} TF$, folglich

$$Tm = mF;$$

§. 15. Da die Summe zwoer gleichen entgegengesetzten Grössen allemal $= o$ ist, so muß auch, wann $ME = FN$ ist, die Summe der beiden Werthe von $y = o$ sein. Nun aber sind die Glieder der Gleichung A (§. 10.) welche blos die erste Potenz von y enthalten, diese

$$\frac{1}{2} axy + \frac{1}{2} by - \frac{1}{2} aSy = (\frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} aS) y;$$

Da also die Summe dieser Coefficienten mit ihren entgegengesetzten Zeichen die Summe der beiden Werthe von y ausmacht, so ist auch

$$\frac{1}{2} aS + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} ax = o;$$

Folglich $aS - b - ax = o;$

Aber das zu MF und FN gehörige x ist mF, mithin

$$aS - b - a \cdot mF = o;$$

Da ferner die Glieder der Gleichung

$$y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = o; \quad L.)$$

in welchen blos die erste Potenz von y vorkommt, diese sind

$$axy + by = (ax + b) y;$$

so folgt (§. 7. Einl.), daß die Summe der beiden Werthe von $y = -ax - b = -a \cdot mF - b;$

Und da diese Summe = o sein muß, so erhält man

— a ⋋ mF — b = o; M.)

Weil nun auch aS — a . mF — b = o ist, so ist

aS = o;

und daher, weil S eine veränderliche Grösse ist, wird auch

a = o N.)

Dieses in M gesetzt, giebt

o — b = o

Folglich auch b = o, P.)

Es verschwinden also wegen der Gleichungen N, P. in der Gleichung L das zweite und dritte Glied, und das letzte, c, ist ohnehin = o (§. 11.); daher wird nun aus L diese Gleichung

$y^2 + cx^2 + dx = o.$

Hier kommt also kein Glied vor, in welchem sich die erste Potenz von y befände, und dieses ist ein Zeichen, daß die Abscissenaxe TF ein Durchmesser ist (§. 6. I.)

§. 16. Theilte auch tF die Chorde mn in zwei gleiche Theile, so gienge sie durch die drei Punkte t, F, und f als die Mitte von mn; sie hätte also mit der Linie TF zwei Punkte F und f gemein, aber ein Punkt von ihr t läge auffer TF; da nun die Lage einer graden Linie durch zwei Punkte völlig bestimmt ist, hier aber nicht alle Punkte der Linie tmf in die grade Linie Tf fallen, beide Linien aber doch

zwei Punkte F und f mit einander gemein haben, so erhellet, daß tFf keine einzige grade Linie sein kann, folglich ist auch tF kein Durchmesser, so lang t auf der TG liegt.

§. 17. Weil $BMN = R$, so ist $B + N = R$, ebenso ist $PMN + N = R$, weil $P = R$; es ist also $PMN + N = B + N$, mithin $PMN = B$; da nun auch $BPM = MPN$, so ist weiter $BMP = N$, folglich $\triangle BMP \sim \triangle MPN$, woraus die Verhältnis $NP : PM = PM : PB$, folgt, oder

$$S : y = y : N;$$

$$\text{also} \quad N = \frac{y^2}{S};$$

Nun aber ist aus §. 10.

$$S = \frac{2y^2 + axy + by}{ay + 2cx + d};$$

$$\text{Folglich} \quad N = \frac{y^2}{\frac{2y^2 + axy + by}{ay + 2cx + d}} =$$

$$= \frac{y^2 . (ay + 2cx + d)}{2y^2 + axy + by};$$

$$= \frac{y . (ay + 2cx + d)}{2y + ax + b};$$

$$= \frac{ay^2 + 2cxy + dy}{2y + ax + b};$$

§. 18.

§. 18. Ist die Abscissenaxe ein Durchmesser, wie TG, so sind die zu jedem x gehörigen Applikaten FM und FN gleichgroß, aber entgegengesetzt, also ihre Summe = o. Nun ist in der Gleichung

$$y^2 + axy + by + (\tfrac{1}{4}a^2 - m^2)x + (\tfrac{1}{2}ab - n)x + \tfrac{1}{4}b^2 - \frac{n^2}{4m^2} = o \quad B.)$$

die Summe der Coefficienten mit ihren entgegengesetzten Zeichen von denjenigen Gliedern, welche die erste Potenz von y enthalten, die Summe der beiden Werthe der Applikaten (§. 6. Einl.), also ist $-(ax + b)$ diese Summe, und da diese = o sein muß, so ist $-(ax + b) = o$, oder

$$ax + b = o. \quad Q.)$$

Weil nun b bei jedem Werth von x immer einerlei Werth behält, so muß es denselben auch noch für $x = o$ haben; in dem Fall aber, da $x = o$, wird $ax = o$ und das erste Glied der Gleichung Q verschwindet, so daß noch $b = o$ übrig bleibt. Also ist b in allen Fällen = o, x mag einen Werth haben, welchen man will, und es ist daraus klar, daß auch in allen Fällen in Q

$$ax = o;$$

sein müsse. Da ax unter allen Umständen die o ausmacht, x aber jeden Werth, welchen man will, haben kann, so muß $a = o$ sein; es verschwinden also in B alle diejenige Produkte, welche a oder b als Faktoren enthalten, weil diese = o sind, und es ergiebt sich aus ihr folgende Gleichung

$y^2 -$

$$y^2 - m^2 x^2 - nx - \frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0; \quad R.)$$

Nun ist (§. 1.)

$$\frac{n^2}{4m^2} \mp p = \tfrac{1}{4} b^2 - e$$
$$= 0;$$

weil auch $e = 0$ (§. 11.); Also wird aus R diese

$$y^2 - m^2 x^2 - nx = 0;$$

und $y^2 = m^2 x^2 \mp nx;$

Wird nun $x = 0$, so wird $m^2 x^2 \mp nx = 0$, folglich ist für $x = 0$

$$y^2 = 0, \text{ oder } y = 0;$$

Oder im Anfangspunkt der Abscissen ist $y = 0$; dieser liegt also in der krummen Linie selbst. Der Punkt aber des Durchmessers, welcher in dem Kegelschnitt liegt, heißt des Durchmessers Spitze, welche also hier der Anfangspunkt der Abscissen ist.

§. 20. Wenn man die Abscissen von der Spitze des Durchmessers an rechnet, so wird (§. 18.)

$$-\frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0; \quad M.)$$

Ist nun $p = 0$, so ist die zu dieser Gleichung gehörige Linie kein Kegelschnitt. Da nun für $n = 0$ auch $p = 0$ wird, so erhellet, daß alsdann die Linie vom zweiten Grad kein Kegelschnitt mehr ist, wann $n = 0$ wird. Da ferner (§. 1.) $m^2 = \frac{1}{4} a^2 - c$,

also hier $= -c$, so würde für $m^2 = \infty$ aus der allgemeinen Gl. $y^2 + axy + by + cx^2 + dx + e = 0$, diese

$$cx^2 = 0$$

weil wegen $c = \infty$ alle übrige Glieder verschwinden würden; aber eben weil $c = \infty$, so wäre

$$cx^2 = \infty,$$

Folglich $$0 = \infty,$$

welches widersprechend ist. Also kann m^2 niemals unendlich groß werden, und der Bruch $\frac{n^2}{4m^2}$ kann daher nicht etwa dadurch, daß sein Nenner unendlich groß würde, $= 0$ werden. Sollte also $\frac{n^2}{4m^2} = 0$ werden, so müßte sein Zähler n^2 folglich $n = 0$ sein. Da nun in der Gleichung M.) für $p = 0$, auch $\frac{n^2}{4m^2} = 0$ wird, so erhellet, daß, sobald $p = 0$ werde, auch $n = 0$ sein müsse.

Aus diesem allem folgt nun, daß nicht nur n bei den Kegelschnitten allemal einen wirklichen Werth hat, sondern daß sich dieses n auch bei keinen andern Linien der zweiten Ordnung findet, als bei Kegelschnitten. Diese beständige Grösse n, die sich in jeder Gleichung für einen Kegelschnitt finden muß, und niemal zu Nichts werden kann, heißt der **Parameter**. (S. Erläut. der K. Anal. S. 97; 103 u. 118.)

§. 21.

§. 21. Weil für den Fall, da $\frac{n^2}{4m^2} \mp p = 0$, $y^2 - m^2x^2 - nx = 0$ ist, so ergiebt sich, wenn man y dem halben Parameter gleich setzt,

$$\tfrac{1}{4}n^2 - m^2x^2 - nx = 0;$$

also für ein negatives m^2

$$\tfrac{1}{4}n^2 = m^2x^2 \mp nx;$$

$$\frac{n^2}{4m^2} = x^2 \mp \frac{n}{m^2}x;$$

$$\frac{n^2}{4m^2} \mp \frac{n^2}{4m^4} = x^2 \mp \frac{n}{m^2}x \mp \frac{n^2}{4m^4};$$

$$\sqrt{\left(\frac{n^2m^2 \mp n^2}{4m^4}\right)} = x \mp \frac{n}{2m^2};$$

$$x = \frac{-n \mp \sqrt{(n^2m^2 \mp n^2)}}{2m^2} = \frac{-n \mp n\sqrt{(1 \mp m^2)}}{2m^2}$$

Ebenso ergiebt sich für ein positives m^2

$$x = \frac{-n \mp n\sqrt{(1 - m^2)}}{2m^2};$$

Ist $m^2 = 0$, so ist

$$\tfrac{1}{4}n^2 - nx = 0; \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{4}n. = x;$$

Der Werth von x für das positive m^2 wird unmöglich, wenn $1 - m^2$ eine verneinte also $1 < m^2$ ist. Folglich bleibt noch x unmöglich, wenn $n < m^2 n$

oder

oder $n : m^2 < n$ ist. Weil nun $y^2 - m^2x^2 - nx = 0$ (§. 18.), so ist, wann $y = 0$, $m^2x^2 + nx = 0$, folglich $m^2x + n = 0$; dieses giebt

$$x = -\frac{n}{m^2};$$

Die Gl. $m^2x^2 + nx = 0$ bleibt aber auch richtig, wenn man in ihr $x = 0$ setzt; also giebt es zwei Fälle, da $y = 0$ wird, oder da die Abscissenaxe die krumme Linie schneidet, nämlich

1.) Für $x = \frac{n}{m^2}$;

2.) Für $x = 0$;

Nun aber ist hier der Durchmesser die Abscissenaxe, $x = 0$ ist die Spitze desselben, und $x = \frac{n}{m^2}$ erstreckt sich von dieser Spitze des Durchmessers an bis an den Endpunkt desselben, mithin ist $\frac{n}{m^2}$ die ganze Länge des Durchmessers. Da nun vorhin erwiesen worden, daß, für $y = \frac{1}{2}n$, x in allen Fällen möglich sei, wenn nur $n : m^2 > n$ ist, so erhellet, daß es in dem Kegelschnitt, dessen Axe grösser als der Parameter ist, ein x folglich ein Punkt gebe, wo y dem halben Parameter gleich ist.

Hat nun der Durchmesser zwei Spitzen, wie Fig. 21., so läßt sich ein solches x, dessen zugehöriges y dem halben Parameter gleich ist, sowohl von

a nach

a nach c, als von b nach c zu nehmen, und es giebt also bei Kegelschnitten, die zwei Spitzen, wie hier a und b, haben, allemal zwei Punkte, in welchen die Ordinate dem halben Parameter gleich ist. Bei Kegelschnitten aber, die nur eine Spitze haben, wie b a c Fig. 22., kann es auf dem Durchmesser a d nicht mehr als einen Punkt geben, in welchem $y = \frac{1}{2} n$. Also bei Kegelschnitten, deren Durchmesser unendlich ist, giebt es nur einen einzigen solchen Punkt. Dergleichen Punkte, in welchen $y = \frac{1}{2} n$, heissen Brennpunkte.

§. 22. Aus §. 18. ist

$$y^2 = m^2 x^2 + nx, \text{ also für } y = \tfrac{1}{2} n$$

$$\tfrac{1}{4} n^2 = m^2 x^2 + nx,$$

mithin weil F ein Brennpunkt ist, AF

$$AF = -\frac{n}{2m^2} \pm \frac{n}{2m^2}\sqrt{(1 + m^2)}; \text{ (§. 21.)}$$

$$\text{Folglich } q = -p \pm p\sqrt{(1 + m^2)}$$

$$\text{wenn man } \frac{n}{2m^2} = p \text{ setzt.}$$

Da nun

$$FM^2 = y^2 + q^2 + x^2 - 2qx;$$

so folgt

$$FM^2 = m^2 x^2 + 2pm^2 x + q^2 + x^2 - 2qx;$$

oder

$$= m^2x^2 + q^2 + x^2 - 2qx + 2pm^2 x \text{ N.)}$$

Nun

Nun aber ist

$$2qx\sqrt{(1+m^2)} = 2pm^2x - 2qx,$$

welches synthetisch also erhellet:

Aus der angenommenen Gleichung

$$2qx\sqrt{(1+m^2)} = 2pm^2x - 2qx; \text{ L.})$$

folgt $$q\sqrt{(1+m^2)} = pm^2 - q;$$ also

$$q+q.\sqrt{(1+m^2)} = pm^2 \text{ M.})$$

Um nun zu prüfen, ob in der That

$$q+q\sqrt{(1+m^2)} = pm^2$$

seie, so substituire man den Werth von q,

Diese Substitution giebt

$$q+q\sqrt{(1+m^2)} = -p.\left(1+\sqrt{(1+m^2)}\right)$$
$$+p.\sqrt{(1+m^2)}+p.(1+m^2);$$
$$= -p-p\sqrt{(1+m^2)}+p\sqrt{(1+m^2)}$$
$$+p+pm^2;$$
$$= pm^2$$

daß also die Gl. M folglich auch die L richtig ist. Wenn man nun in L. den Werth von $2pm^2x - 2qx$ substituirt, so erhält man

$$FM^2 = m^2x^2 + x^2 + q^2 + 2qx\sqrt{(1+m^2)}$$
$$= x^2(1+m^2) + 2qx.\sqrt{(1+m^2)} + q^2$$
$$= \left(x\sqrt{(1+m^2)}+q\right)^2, \text{ also ist}$$
$$FM = x\sqrt{(1+m^2)}+q; \text{ S. §. 24.}$$

§. 23. Die Subtangente ist (§. 17.) $=$

$$\frac{ay^2 + 2cxy + dy}{2y + ax + b}.$$

Setzt man nun aus §. 1. statt c, $\frac{1}{4}a^2 - m^2$; statt d, $\frac{1}{2}ab - n$, so erhält man für die Subtangente diesen Ausdruck

$$\left(ay^2 + 2.\left(\tfrac{1}{4}a^2 - m^2\right)xy + \left(\tfrac{1}{2}ab - n\right)y\right) : (2y + ax + b);$$

$$= -m^2x - \tfrac{1}{2}n;$$

$$= -m^2\left(x + \frac{n}{2m^2}\right);$$

$$= -m^2(x + p);$$

Es ist also $PR = -m^2x - m^2p$;

mithin $PR^2 = m^4x^2 + 2m^4px + m^4p^2$;

und $PM^2 = y^2$;

Hieraus folgt

$$MR^2 = PM^2 + PR^2 = y^2 + m^4x^2 + 2m^4px + m^4p^2;$$

Nun aber ist

$$m^4x^2 + 2m^4px = m^2.(m^2x^2 + 2m^2px);$$

$$= m^2y^2 \text{ (§. 22.)};$$

Folglich ist

$$MR^2 = y^2 + m^2y^2 + m^2y^2 + m^4p^2;$$

Es sei nun RL senkrecht auf MF, so sind in den beiden Dreiecken MFP und RFL, alle Winkel

gleich

gleich groß, denn $P = L$, $F = F$, folglich auch $M = R$. Folglich ist das Dreieck $MFP \sim RFL$, und daher $FR : RL = MF : MP$, mithin

$$FR . MP = RL . MF;$$

Dieses giebt

$$RL = \frac{FR . MP}{MF};$$

In dieser Gleichung den Werth von FR substituirt, giebt

$$RL = \frac{(AP - AF + PR) . MP}{MF}; \text{ N.)}$$

Nun ist $AP = x$, $AF = q$, $MF = q + x\sqrt{(1 + m^2)}$, $MP = y$ und $PR = -(m^2 x + m^2 p)$; (§. 23.) also ist

$$RL = \frac{\left(x - q + (m^2 x + m^2 p)\right) . y}{q + x\sqrt{(1 + m^2)}}; \text{ O.)}$$

Es scheint zwar in dieser Gl. ein Fehler zu liegen, weil $PR = -(m^2 x + m^2 p)$ und daher die Gleichung so aussehen sollte

$$RL = \frac{\left(x - q - (m^2 x + m^2 p)\right) . y}{q + x\sqrt{(1 + m^2)}}; \text{ P.)}$$

Allein diese Schwierigkeit läßt sich leicht heben. Aus Betrachtung der Gl. N. ersieht man nämlich, daß zu $AP - AF$ oder $x - q$ noch eine Linie addirt werden soll, die $= PR$ ist. Nun aber ist $PR = -(m^2 x + m^2 p)$ d. h. der Grösse nach ist sie $= m^2$

$= m^2 x + m^2 p$, aber sie hat nur eine andere, nämlich entgegengesetzte Lage, welche Einschränkung hier nichts bedeutend ist, weil die Linie, welche $= m^2 x + m^2 p$ noch gar keine bestimmte Lage hat. Setzte man aber in N statt PR, $-(m^2 x + m^2 p)$, wie in P geschehen ist, so würde dieses soviel heisen, man solle von $x - q$ eine Linie abziehen, die $= m^2 x + m^2 p$ wäre, da doch eine solche Linie addirt werden soll. Es erhellet also, daß die Gl. O richtig ist, P aber falsch wäre. Nun ist der Zähler der Gl. O.

$$= (x + m^2 x + m^2 p - q)\, y$$

$$= \left(x(1 + m^2) + m^2 p - q\right) y$$

$$= \left(x.(1+m^2) + m^2 p + p - p\sqrt{(1+m^2)}\right) y;$$

(weil $q = -p + p\sqrt{(1+m^2)}$ (§. 22.)

$$= [x(1+m^2) + \sqrt{(1+m^2)} \times -p + p(1+m^2)]\, y$$

$$= [x\sqrt{(1+m^2)^2} + \sqrt{(1+m^2)} \times (-p + p.\sqrt{(1+m^2)})]\, y;$$

$$= \left(x\sqrt{(1+m^2)^2} + \sqrt{(1+m^2)}.q\right) y;$$

Dieses in die Gleichung O statt des dortigen Zählers gesetzt, giebt

$$RL = \frac{x\sqrt{(1+m^2)^2} + q.\sqrt{(1+m^2)}}{q + x\sqrt{(1+m^2)}}\, y;$$

$$= \left(\sqrt{(1+m^2)}\right) y;$$

und

und $RL^2 = (1 + m^2)y^2 = y^2 + m^2 y^2$, folglich

$$ML = \sqrt{(MR^2 - RL^2)}$$

$$= \sqrt{\left((y^2 + m^2 y^2 + m^4 p^2) - (y^2 + m^2 y^2)\right)}$$

$$= \sqrt{(m^4 p^2)} = m^2 p = m^2 . \frac{n}{2 m^2} = \tfrac{1}{2} n;$$

Zieht man also aus dem Brennpunkt F in irgend einen Punkt des Kegelschnitts eine grade Linie, die ich in der Folge schlechtweg Brennpunktslinien nennen will, und verzeichnet auf derselben den Punkt L auf die hier gewiesene Art, so ist das Stück ML der in dem Brennpunkt stehenden Applikate gleich (§. 21.) Da ferner $MF = AF + x\sqrt{(1 + m^2)}$ (§. 22.) so ist

$$MF - AF = x\sqrt{(1 + m^2)};$$

und aus dem Vorhergehenden ist

$$RL = y\sqrt{(1 + m^2)}$$

Folglich

$$(MF - AF) : RL = x\sqrt{(1+m^2)} : y\sqrt{(1+m^2)};$$

$$= x : y = AP : PM;$$

Hieraus fliest folgender Satz:

Wenn man eine Brennpunktslinie (FM), und auf diese aus dem Endpunkt (R) der zu der Brennpunktslinie gehörigen Subnormale (PR) einen Perpendikel zieht, so verhält sich dieser Perpendikel (RL) zu der Differenz der Brennpunktslinie und der in den Brennpunkt reichenden Abscisse (FM — AF), wie die zu der

Brennpunktslinie gehörige Applikate MP zu der ihr zugehörigen Abscisse PA.

§. 24. Es lassen sich diesem Buch noch einige Sätze beifügen, welche die Berechnung einiger Linien betreffen, und weil sie mit den vorhergehenden gleich wichtig scheinen, so will ich sie in diesem §. vortragen.

I. Die Entfernung des Brennpunkts von der Normale zu finden.

Aufl. Es ist

$$EM = \sqrt{(FM^2 - FE^2)}$$

$$= \sqrt{\left(FM^2 - \frac{n^2 . FM^2}{4MR^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4MR^2 \times FM^2 - n^2 . FM^2}{4MR^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\left((4MR^2 - n^2)\, FM^2\right)}}{2MR}$$

$$= \frac{FM}{2MR}\sqrt{(4MR^2 - n^2)}$$

$$= \frac{FM}{2MR} \cdot 2\sqrt{(MR^2 - \tfrac{1}{4}n^2)};$$

$$= \frac{FM}{MR}\sqrt{(MR^2 - \tfrac{1}{4}n^2)}$$

Nun ist aber $ML = \frac{1}{2}n$, also $\frac{1}{4}n^2 = ML^2$ mithin

EM

$$EM = \frac{FM}{MR} \cdot \sqrt{(MR^2 - ML^2)}$$

$$= \frac{FM}{MR} \cdot \sqrt{RL^2} = \frac{FM}{MR} \cdot RL$$

$$= \frac{FM.y}{MR} \sqrt{(1 + m^2)} =$$

weil $RL = y \cdot \sqrt{(1 + m^2)}$; (§. 23.)

Zieht man nun FN auf MR senkrecht, so ist

$$FN = EL = \frac{y.FM.\sqrt{(1 + m^2)}}{MR}$$

$$= \frac{y.(q.\sqrt{(1 + m^2)} + x.(1 + m^2))}{MR}$$

welches die gesuchte Entfernung ist.

II. Einen Ausdruck für die Subtangente zu finden, wenn die Abscissenaxe ein Durchmesser ist.

Aufl. Aus (§. 10.) ist die Subtangente S

$$= \frac{2y^2 + axy + by}{ay + 2cx + d}$$

Also ist hier, da $a = b = o$ ist,

$$S = \frac{2y^2}{2cx + d}$$

Nun aber ist (§. 1.) $c = \frac{1}{4}a^2 - m^2$ und $d = \frac{1}{2}ab - n$, also hier $c = -m^2$ und $d = -n$, folglich

$$S = \frac{2y^2}{2cx + d}$$

$$= \frac{2y^2}{-(2m^2x + n)}$$

$$= \frac{-y^2}{m^2x + \frac{1}{2}n}$$

$$= \frac{-y^2}{m^2(x + p)}$$

$$= \frac{-(m^2x^2 + 2m^2px)}{m^2(x + p)}$$

Oder wie (§. 23.) $= \frac{m^2x^2 + 2m^2px}{m^2(x + p)}$

$$= \frac{x^2 + 2px}{x + p}$$

$$= x + \frac{px}{x + p};$$

III.) Einen Ausdruck für die Linie AT zu finden, die auf der verlängerten Axe liegt, und von dem Scheitelpunkt bis an die Tangente reicht.

Aufl. Sie ist $= S - x$

$$= \left(x + \frac{px}{x+p}\right) - x \text{ aus (no II.)}$$

$$= \frac{px}{x+p};$$

IV.)

IV.) Einen Ausdruck für die Linie bc zu finden, welche auf der Spitze der Axe senkrecht steht, und bis an die Tangente reicht.

Aufl. Es ist Fig. 23.

$$ac : bc = ae : Me \text{ oder}$$

$$\left(\frac{px}{x + p}\right) : bc = \left(x + \frac{px}{x + p}\right) : y$$

also

$$bc = \frac{y \cdot px}{(x + p) \cdot \left(x + \frac{px}{x + p}\right)}$$

$$= \frac{y \cdot px}{x^2 + px + px} = \frac{y \cdot px}{x^2 + 2px}$$

$$= \frac{py}{x + 2p}$$

V.) Die Entfernung des Scheitelpunkts von der Tangente dc zu finden. Fig. 23.

Aufl. Da die Subnormale überhaupt $= \pm m^2 \cdot (x + p)$

so wird hier

$$e\mu = \pm m^2 \cdot (x + p);$$

und $$ae = x + \frac{px}{x + p};$$

$$\text{also } a\mu = \frac{\mp m^2.(x \mp p) + x \mp \frac{px}{x \mp p}}{};$$

$$= \frac{\mp m^2.(x \mp p)^2 + x^2 \mp 2px}{x \mp p};$$

Nun ist

$$a\mu : M\mu = ac : cd;$$

$$\text{also } cd = \frac{ac.M\mu}{a\mu};$$

Da also $ac = \frac{px}{x \mp p}$ aus (n. III.)

und $M\mu = \sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 \mp (1 \mp m^2)y^2\right)}$; (§. 23.);
so erhält man

$$cd = \frac{\frac{px}{x \mp p}.\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 \mp (1 \mp m^2)y^2\right)}}{\left(x^2 \mp 2px \mp m^2(x \mp p)^2\right):(x \mp p)}$$

$$= \frac{px\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 \mp (1 \mp m^2)y^2\right)}}{x^2 \mp 2px \mp m^2(x \mp p)^2};$$

§. 25. In dem Kreis ist

$$y^2 = 2rx - x^2$$

mithin $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$

Für die Kegelschnitte ist

$$y^2 \mp axy \mp \left(\frac{1}{4}a^2 - m^2\right)x^2 - nx = 0;$$

Substi-

Substituirt man nun in dieser Gleichung $\sqrt{(2rx - x^2)}$ für y, so ergiebt sich

$$2rx - x^2 \pm ax\sqrt{(2rx - x^2)} \pm \tfrac{1}{4}a^2x^2 - m^2x^2 - nx = 0;$$

und

$$(2rx - x^2 \pm \tfrac{1}{4}a^2x^2 - m^2x^2 - nx)^2 = \left(-ax\sqrt{(2rx - x^2)}\right)^2$$

Also

$$4r^2x^2 - 2rx^3 \pm 1x^4 = a^2x^2.(2rx - x^2);$$

$$-2rn \pm \tfrac{1}{2}a^2r - \tfrac{1}{4}a^2 = 2ra^2x^3 - a^2x^4;$$

$$-2rn \quad -2rm^2 \pm m^2$$

$$\pm n^2 \quad -2r \quad -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\pm n \quad \pm \tfrac{1}{16}a^4$$

$$\pm \tfrac{1}{2}a^2r \quad -\tfrac{1}{4}a^2m^2$$

$$-\tfrac{1}{4}a^2n \pm m^2$$

$$-2rm^2 \quad -\tfrac{1}{4}a^2m^2$$

$$\pm nm^2 \pm m^4$$

$$\pm n$$

$$-\tfrac{1}{4}a^2n$$

$$\pm m^2n$$

oder

$$m^4x^4 \pm 2nm^2x^3 \pm 4r^2x^2 = 0;$$

$$\pm 2m^2 \quad -4rm^2 \pm n^2$$

$$-\tfrac{1}{2}a^2m^2 \quad -4r \quad -4rn$$

$$\pm \tfrac{1}{2}a^2 \quad -a^2r$$

$$\pm \tfrac{1}{16}a^4 \quad -\tfrac{1}{2}a^2n$$

$$\pm 1 \pm 2n$$

Hieraus

Hieraus folgt

$$x^4 \pm \frac{(2n - 4r - a^2 r - 4rm^2 \pm 2m^2 n - \frac{1}{2}a^2 n)x^3}{1 \pm a^2 \pm m^4 \pm \frac{1}{16}a^4 \pm 2m^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 m^2}$$

$$\pm \frac{(4r^2 \pm n^2 - 4rn)x^2}{1 \pm a^2 \pm m^4 \pm \frac{1}{16}a^4 \pm 2m^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 m^2}$$

$= 0$; A.)

In dieser Gleichung hat nun die Wurzel vier Werthe (Kästn. Anal. §. 223.) folglich kann der Kreis den Kegelschnitt höchstens in vier Punkten schneiden. Diese Wurzeln erhält man, wenn man statt x solche Zahlen sowohl mit dem Zeichen $\pm$ als $-$ setzt, wodurch die Glieder der obigen Gleichung A.) zusammen in der That $= 0$ werden (K. §. 294.). Dieses geschieht nun hier sowohl für $x = \pm 0$ als $x = -0$, mithin sind zwei Werthe der obigen Gleichung $= 0$, oder zwei Durchschnittspunkte fallen in dem Anfangspunkt der Axe, in A, zusammen. Wird $4r^2 \pm n^2 - 4rn = 0$, so wird in der Gleichung A der Coefficient des dritten Glieds $= 0$, aber des zweiten Glieds Coefficient verschwindet nicht, weil in dem Zähler desselben noch $- a^2 n$ bleibt.*) Nun ist

*) Es erhellet nämlich, daß dadurch, daß $r = \frac{1}{2}n$ wird, nicht nothwendig alle vier Wurzeln $= 0$ sein müssen. Es kann zwar $- a^2 n = 0$ werden, wenn nämlich A die Spitze des Durchmessers vom Kegelschnitt ist (§. 18.); und alsdann sind freilich alle vier Wurzeln $= 0$, allein dieses ist keine Folge von $r = \frac{1}{2}n$, sondern dieß rührt nur von der besondern Lage des Punkts A her.

ist der Coefficient des zweiten Glieds = der Summe der Wurzeln mit ihren entgegengesetzten Zeichen, und des dritten Glieds Coefficient ist = der Summe der Produkten aus allen Paaren der negativ genommenen Wurzeln (K. §. 224.), folglich ist hier, da des dritten Glieds Coefficient = o ist, wenn man die beiden andern Wurzeln φ, ψ, nennt,

$$(-o).(-o)+(-o).(-\varphi)+(-o).(-\psi)$$
$$+(-\varphi).(-\psi)=o;$$

also $\varphi\psi = o$;

Nun sind zwei Fälle möglich, da $\varphi\psi = o$ werden kann: entweder ist eine von beiden Wurzeln φ oder $\psi = o$, oder es sind beide zugleich φ und $\psi = o$. Daß aber der letztere Fall hier nicht statt findet, erhellet folgendergestalt. Der Coefficient des zweiten Glieds oder der von x^3 ist hier =

$$-o-o-\varphi-\psi;$$

Wäre nun sowohl φ als $\psi = o$, so wäre auch

$$-o-o-\varphi-\psi = o$$

und der Coefficient von x^3 müßte also o sein, welches doch nicht ist; mithin wird in dem Fall, da $r = \frac{1}{2}n$, nur noch eine von den beiden Wurzeln φ, ψ, $= o$, und es sind demnach für diesen Fall zusammen drei Wurzeln der Gleichung (A) $= o$, oder es fallen in A drei Durchschnittspunkte zusammen, und der Kreis kann dem Kegelschnitt ausser A nur noch einmal begegnen, wenn $r = \frac{1}{2}n$ ist, oder wenn des Kreises Durchmesser dem Parameter des Kegelschnitts gleich ist. Da also ein Kreis völlig bestimmt

ist,

ist, wenn sein Durchmesser gegeben wird, so erhellet, daß es bei jedem Kegelschnitt an einem gewissen Punkt nur einen einzigen solchen Kreis gebe, der den Kegelschnitt in A dreimal schneidet, oder dessen Durchmesser des Kegelschnitts Parameter ist. Ein solcher Kreis nun, dessen Durchmesser dem Parameter des Kegelschnitts gleich ist, auf dessen Tangente er senkrecht steht, heißt der Krümmungskreis.

§. 26. Da Kreise Kegelschnitten, wenn sie einander durchschneiden, desto näher kommen, je weniger ihre Durchschnittspunkte von einander entfernt sind, so werden diejenige einander am nächsten sein, deren vier Durchschnittspunkte zusammenfallen, und ausser dem diejenige, bei welchen drei zusammenfallen. Da nun beides bei dem Krümmungskreis geschieht, das letztere nämlich allemal, und das erstere nur alsdann, wann derselbe den Kegelschnitt an der Spitze des Hauptdurchmessers berührt; und da keines von beiden geschieht, solang bei dem Kreis nicht $r = \frac{1}{2}n$, oder solang der Kreis kein Krümmungskreis ist, so erhellet, daß die Krümmung des Krümmungskreises der Krümmung des Kegelschnitts näher komme, als jeder andere zwischen dem Kegelschnitt und der Tangente AF. Wenn AgHBHA der Krümmungskreis ist, und C sein Mittelpunkt, so beschreibt jeder andere Halbmesser, den man auf Ab nimmt, und welcher grösser als AC ist, einen Kreis zwischen AF und dem Kegelschnitt, und jeder dieser Kreise ist näher mit dem Kegelschnitt verbunden, als die grade Linie AF, und unter diesen Kreisen

sen selbst kommt die Krümmung desjenigen der Krümmung des Kegelschnitts allemal näher, welcher dem Kegelschnitt in der That näher liegt; macht man also unendlich viele solcher Kreise zwischen der Tangente AF und dem Kegelschnitt, so nähern sich dieselben immer mehr und mehr der Krümmung des Kegelschnitts, und der letzte *) in dieser unendlichen Reihe von Kreisen muß der Krümmung des Kegelschnitts in A unendlich nahe sein, oder er muß in diesem Punkt die Krümmung des Kegelschnitts wirklich haben. Nun kommt aber der Krümmungskreis unter allen Kreisen der Krümmung des Kegelschnitts am nächsten, wie vorher erwiesen worden ist; dieser ist also als die Gränze anzusehen, welche die Kreise zwischen der Tangente AF und dem Kegelschnitt, wenn sie sich dem Kegelschnitt unendlich genähert haben, erreichen. Dieser muß daher in A die Krümmung des Kegelschnitts haben.

Da ein Kreis durchaus gleichförmig gekrümmt ist, so kann gar kein Theil desselben grad sein. Nun läßt sich an jedem Punkt eines Kegelschnittes ein Krümmungskreis ziehen, und an diesem Punkt kommt ein Theil des Kegelschnitts mit der Krümmung des Krümmungskreises überein; folglich ist jeder Kegelschnitt an jedem Punkt gekrümmt, und daher eine beständig krumme Linie. Es erhellet auch hieraus,

*) Man kann hier ein letztes Glied annehmen, so wie in der unendlichen Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - - - r$ wo das letzte Glied $= 0$ ist. (S. Kästn. Anal. Unendl. §. 4.)

hieraus, daß sich jeder Kegelschnitt als eine krumme Linie ansehen läßt, die aus lauter Stücken verschiedener Kreise zusammengesetzt ist.

§. 27. Aus der Erklärung des Krümmungskreises (§. 25.) erhellet, daß man nur, um den Halbmesser desselben zu finden, an den gegebenen Punkt des Kegelschnitts eine Tangente ziehen darf; ein Perpendikel $FC = \frac{1}{2}n$ auf dieser Tangente ist der Halbmesser der Krümmung. Durch die verschiedene Lage des Punkts F erhält auch der Perpendikel FC verschiedene Lage, und da man auf demselben sowohl für den Kegelschnitt, als für den Krümmungskreis die Abscissen und Ordinaten nimmt, so erhält man offenbar für jeden andern Punkt F auch einen andern Parameter; denn dieser wird aus der Verhältnis der Abscissen und Ordinaten gegeneinander bestimmt. Um daher in jedem Fall den Werth von n zu finden, muß man jedesmal aus der allgemeinen Gleichung für einen gegebenen Kegelschnitt eine solche machen, in welcher FK die Abscissen- und FG die Applikatenaxe ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich alsdann n, und mithin auch der Halbmesser der Krümmung, der $= \frac{1}{2}n$ ist. Dieses geschieht folgendergestalt:

Es sei der Kegelschnitt (Fig. 24.) gegeben, man soll den Halbmesser der Krümmung an dem Punkt F finden, so ziehe man die Axe AB nach (§. 7. 8. I.) und nehme auf ihr die Abscisse AB willkührlich an, und ziehe aus B in D die senkrechte Ordinate DB. Man verzeichne ferner die Tangente FG, und lasse

auf

auf sie die KF senkrecht. Aus D ziehe man weiter auch FK die senkrechte Ordinate DH, so wird $x = \alpha + \delta z + \gamma u$, und $y = fu + \beta - \varepsilon z$; wenn man §. 6. Einl. $\alpha, \delta, \gamma, \beta, \varepsilon$, statt a, d, c, b, e schreibt. *) Da sich nun die Gleichungen, welche für die Kegelschnitte gegeben werden, gewöhnlich auf den Hauptdurchmesser beziehen, und jeder Kegelschnitt sich in Beziehung auf diesen Durchmesser durch die Gleichung

$$y^2 - m^2 x^2 - nx = 0;$$

ausdrucken läßt, so setze man nur in dieser Gleichung, bei jeder andern Abscissenaxe FK, statt x, $\alpha + \delta z + u$ und statt y, $fu + \beta - \varepsilon z$. Man erhält dadurch

$$f^2 u^2 + 2\beta fu + \beta^2 - 2(fu + \beta)\varepsilon z + \varepsilon^2 z^2 - m^2(\alpha^2 + \alpha\delta z + \delta^2 z^2 + 2\alpha u\gamma + 2\gamma u\delta z + \gamma^2 u^2) - n(\alpha + \delta z + \gamma u) = 0;$$

Folglich $\frac{1}{2}n$ oder der Halbmesser der Krümmung $=$

$$[(f^2 - m^2\gamma^2)a^2 + 2(\beta f - \alpha m^2\gamma - \gamma\delta m^2 x)u + (\varepsilon^2 - m^2\delta^2)z^2 - 2(\varepsilon fu + \varepsilon\beta + \alpha\delta m^2)z + \beta^2 - m^2\alpha^2] : 2(\alpha + \delta z + \gamma u)$$

§. 28. Hat man auf die vorhin erwähnte Art den Durchmesser der Krümmung gezogen, so kann man den Kreis selbst verzeichnen, und in demselben nach

*) Damit man dieses mit §. 6. Einl. desto besser vergleichen könne, habe ich in der Fig. alle Linien wie dorten verzeichnet.

nach Willkühr Sehnen ziehen, wie AB Fig. 25. Zieht man nun auf diese Sehnen aus der Peripherie des Kegelschnitts Applikaten, die mit AF parallel laufen, wie hier PM, wodurch sich zugleich die Abscissen, wie MA, ergeben; so kann man allemal aus solchen Abscissen und Ordinaten einen Ausdruck für die Sehne des Krümmungskreises finden. Man nehme nämlich auf Ab die Abscisse Aα, und ziehe die Ordinate αQ, wodurch sich auch αP, AM und MP geben. Es heisse jede auf AB genommene Abscisse AM, z; jede dazu gehörige Ordinate MP, u; und Aα, αP heissen wie gewöhnlich x, y, so ist

$$A\alpha : \sin AM\alpha = AM : \sin A\alpha M;$$

oder $x : p = z : \sin tot.$

also $x = pz$ für $\sin tot = 1;$

Es ist ferner, wenn man $\sin BAb = q$ setzt

$$M\alpha : q = AM : \sin tot, \text{ oder}$$

$$(y - u) : q = z : 1$$

Folglich

$$y = qz \pm u;$$

Setzt man nun in die Gleichung für den Kreis und den Kegelschnitt (§. 25.) statt x, pz, und statt y, $u \pm qz$, so erhält man die beide Gleichungen

I. Für den Kreis

$$u^2 \pm 2quz + q^2z^2 = 2rpz - p^2z^2$$

II. Für den Kegelschnitt

$$u^2 \pm 2quz + q^2z^2 \pm apuz + apqz^2 \pm \tfrac{1}{4}a^2p^2z^2 - m^2p^2z^2 - upz = 0;$$

Wenn

Wenn man nun $u = o$ setzt, so erhält man die Abscissen, welche den Kegelschnitt und den Kreis schneiden; dadurch wird aber in I.

$$q^2 z^2 = 2rpz - p^2 z^2$$

welche Gleichung zwei Wurzeln hat, nämlich $z = o$, und $z = \frac{2rp}{p^2 + q^2} = \frac{2rp}{1} = np$, denn es ist

$p^2 + q^2 = A\alpha^2 + M\alpha^2 = AM^2 = \sin tot^2 = 1$, und $2r = n$, also ist diejenige Abscisse, welche den Kreis zum zweitenmal schneidet, oder wo u zum zweitenmal $= o$ wird, $= np$, folglich $AB = np$. Ebenso ist in II. für $u = o$,

$$(q^2 + apq + \tfrac{1}{4}a^2p^2 - m^2p^2)z^2 - npz = o;$$

also

$$1)\ z = o;\ 2)\ z = \frac{np}{q^2 + apq + \frac{1}{4}a^2p^2 - m^2p^2},$$

welches AD ist. Hieraus folgt die vom Aut. genannte Verhältnis der AB zu AD. Weil man also hier für $u = o$ die Gleichung

$$(q^2 + apq + \tfrac{1}{4}a^2p^2 - m^2p^2)z^2 - npz = o;$$

und in (10. I.) für $y = o$, diese

$$cx^2 + dx + e = o;$$

erhält, wo x und y, wie hier z und u, Abscissen und Ordinaten vorstellen, so erhellet, daß alles, was in (10. I.) bewiesen worden ist, auch hier gelte, nur daß man statt c, $q^2 + apq + \frac{1}{4}a^2p^2 - m^2p^2$; statt d, np; und statt c hier o setzen muß. Hierdurch erhält man

$(PM \asymp Mm) = (q^2 \mp apq \text{ \&c}) AM . DM.$

Folglich

$PM \asymp Mm : AM \asymp DM = (q^2 \mp apq \text{ \&c.}$

Da nun auch

$AB : BD = q^2 \mp apq \mp \frac{1}{4}a^2p^2 - m^2p^2;$

so folgt

$AB : BD = (PM \asymp Mm) : (AM \asymp DM);$

Mithin

$$\text{I.)}\ AB = \frac{BD . PM . Mm}{AM . DM};$$

Das übrige ist leicht einzusehen.

Aus der Verhältnis $AM : PM = Mm : AB$ folgt

$$\text{II.)}\ AB = \frac{PM . Mm}{AM};$$

Man hat also für jede Sehne der Krümmung einen Ausdruck, der Kegelschnitt mag eine bestimmte oder unbestimmte Axe haben. Im ersten Fall, also blos bei der Ellipse, welche unten nebst der Hyperbel und Parabel wird erklärt werden, gilt der erste Werth von AB. Bei der Hyperbel und Parabel, welches der andere Fall ist, gilt der Werth von AB n. II.

§. 31. Aus der Verhältnis:

$(a^2 \mp 2ap) : (\mp 2ap - a^2 - 2ax \mp 4px - 2ax - 4x^2) = TM : SR;$

folgt:

(a²

$$(a^2 \pm 2ap) : \left(\pm 2ap - a^2 - 2ax \pm 4px - 2ax - 4x^2 \mp (a^2 \pm 2ap)\right)$$
$$= TM : (SR \mp TM) = TM : (SR \mp MS)$$
$$= TM : MR;$$

mithin

$$(a^2 \pm 2ap) : (\pm 4ap - 4ax \pm 4px - 4x^2)$$
$$= TM : MR.$$

Die Gleichung

$$MR = \frac{4x^2}{a^2} . TM$$

läßt sich ohne Schwierigkeit finden.

In dem andern Fall, da die Axe dem Kegelschnitt nur in einem Punkt begegnet, ist

$$TA : AS = TM : SR \text{ oder}$$
$$a : b = TM : SR, \text{ also, weil } b = a \mp 2x,$$
$$a : (a \mp 2x) = TM : SR;$$

Hieraus folgt:

$$a : (a \mp 2x \mp a) = TM : (SR \mp TM)$$

oder

$$a : (2a \mp 2x) = TM : MR, \text{ mithin}$$
$$MR = \frac{(2a \mp 2x) . TM}{a};$$

Weil also hier $a = x$, so ist

$$MR = \frac{4x}{a} . TM$$

$$= \frac{4x^2}{a^2} . TM$$

wie im ersten Fall.

§. 32. Aus $ax : (a - x) = \mp p$, folgt:

$$ax = \mp ap \mp px$$

$$a(x \mp p) = \mp px,$$

mithin

$$a = \frac{\mp px}{x \mp p};$$

und da $p = \frac{n}{2m^2}$ (§. 31.); so wird

$$a = \frac{\mp \frac{n}{2m^2} x}{x \mp \frac{n}{2m^2}}$$

$$= \frac{nx}{\mp 2m^2 x \mp n};$$

Es ist ferner $PB = \mp m^2 (x \mp p)$ (§. 23. II.)

$$= \mp m^2 \left(x \mp \frac{n}{2m^2} \right);$$

$$= \mp m^2 x \mp \tfrac{1}{2} n;$$

Folglich

Folglich

$$TB = TA + AP + PB$$

$$= a + x + m^2 x + \tfrac{1}{2} n;$$

$$= \frac{n x}{+ 2 m^2 x + n} + x + m^2 x + \frac{n}{2};$$

$$= \frac{n x + 2 m^2 x^2 + n x + 2 m^4 x^2 + n m^2 x + \frac{n^2}{2}}{+ 2 m^2 x + n};$$

$$= \frac{2 n x + 2 m^2 x^2 + 2 m^4 x^2 + 2 n m^2 x + \frac{1}{2} n^2}{+ 2 m^2 x + n};$$

Ferner ist

$$2 MB^2 = 2 PM^2 + 2 PB^2;$$

$$= 2 y^2 + 2 PB^2;$$

Aber y^2 ist $= + m^2 x^2 + 2 m^2 p x$; folglich

$$2 MB^2 = 2 (+ m^2 x^2 + 2 m^2 p x) + 2 . (\tfrac{1}{2} n + m^2 x)^2$$

$$= 2 (+ m^2 x^2 + 2 m^2 p x) + 2 (\tfrac{1}{4} n^2 + n m^2 x + m^4 x^2)$$

$$= 2 (+ m^2 x^2 + n x) + \tfrac{1}{2} n^2 + 2 n m^2 x + 2 m^4 x^2;$$

$$= \left(\frac{\overline{+} 2m^2x^2 + 2nx + 2m^4x^2 \overline{+} 2nm^2x + \frac{1}{4}n^2}{\overline{+} 2m^2x + n} \right)$$

$$\cdot (\overline{+} 2m^2x + n)$$

$$= TB \times (\overline{+} 2m^2x + n);$$

Da also $a = \frac{nx}{\overline{+} 2m^2x + n}$; folglich

$$\overline{+} 2m^2x + n = \frac{nx}{a};$$

so ist

$$2MB^2 = TB \cdot \frac{nx}{a};$$

Ist nun $\varrho r \# MT$, so ist $MR\varrho = TMR$, und da überdas $TSM = RS\varrho$, so ist auch

$$MTS = R\varrho S$$

aber MT ist $= MS$, folglich

$$MTS = TSM = RS\varrho \text{ und}$$

$$R\varrho S = RS\varrho \text{ demnach auch}$$

$$RS = R\varrho$$

Da ferner $MBT = rB\varrho$ und

$$TMB = Br\varrho$$

mithin die beiden Dreiecken TMB und $Br\varrho$ gleiche Winkeln haben, so sind diese Dreiecke einander ähnlich, und daher

$$Br : r\varrho = MB : MF,$$

mithin

mithin $Br = \frac{MB \cdot r\varrho}{MT}$;

Ebenso ist auch

$$Br : MB = r\varrho : MT$$

folglich $Br : (MB + Br) = r\varrho : (MT + R\varrho)$

oder $Br : Mr = r\varrho : (MT + R\varrho)$

und hieraus ergiebt sich

$$Mr = \frac{Br \cdot (r\varrho + MT)}{r\varrho}$$

$$= \frac{MB \cdot r\varrho \times (MT + r\varrho)}{MT \cdot r\varrho}$$

$$= \frac{MB \times (MT + r\varrho)}{MT}$$

$$: = (MB \times (MT + rR + R\varrho)) : MT$$

$$= (MB \times (MT + rR + RS)) : MT;$$

Da also $MT = MS$,

folglich $MT + RS = MS + SR$

$= MR$

so ist

$$Mr = \frac{MB \cdot (MR + rR)}{MT}$$

$$= \frac{MB \cdot MR + MB \cdot rR}{MT};$$

mithin

$$Mr \times MT = MB \times MR + MB \times rR$$

und

$$Mr \times MT - MB \times MR = MB \times rR.$$

Aber da $r = TMB$ also bei r ein rechter Winkel ist, so ist

$$rR = \sqrt{(MR^2 - Mr^2)}$$

und daher

$$Mr \times MT - MB \times MR = MB \times \sqrt{(MR^2 - Mr^2)}$$

Folglich

$$Mr^2 \times MT^2 + MB^2 \times MR^2 - 2MB.MR.Mr.MT = MB^2 \times MR^2 - MB^2 \times Mr^2;$$

und

$$Mr^2.MT^2 + MB^2.Mr^2 = MB^2.MR^2 - MB^2 \times MR^2 + 2MB \times MR \times Mr \times MT;$$

oder

$$Mr^2 \times (MT^2 + MB^2) = 2MB.MR.Mr.MT;$$

mithin

$$Mr \times (MT^2 + MB^2) = 2MB.MR.MT$$

und

$$Mr = \frac{2MB.MR.MT}{(MT^2 + MB^2)}$$

Es ist aber

$$MT^2 + MB^2 = TB^2$$

Folglich

$$Mr = \frac{2MB.MT.MR}{TB^2}$$

oder, weil

$$MR = \frac{4x^2}{a^2}.MT \text{ (§. 31.)}$$

so ist

$$Mr = \frac{2MB.MT.\frac{4x^2}{a^2}.MT}{TB^2}$$

$$= \frac{8MB.MT^2.x^2}{a^2.TB^2}$$

mithin

$$2MB.Mr = \frac{16MB^2.MT^2.x^2}{a^2.TB^2};$$

und

$$\sqrt{(2MB.Mr)} = \frac{4MB.MT.x}{a.TB}$$

Hieraus folgt

$$\frac{2MB.\sqrt{(2MB.Mr)}}{n} = \frac{4MT.x.2MB^2}{an.TB}$$

$$= \frac{4MT.x.\left(\frac{TB.nx}{a}\right)}{an.TB}$$

$$=$$

$$= \frac{4MT \cdot x^2}{a^2}$$

$$= MR \text{ (§. 31.)}$$

Da jeder Perpendikel, der auf der Mitte von eines Kreises Sehne steht, durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht, so muß auch p c, die auf der Sehne M R senkrecht steht, durch die Mitte des Krümmungskreises gehen, und da ebendieses von Linien gilt, welche von dem Berührungspunkt einer Tangente senkrecht durch den Kreis gezogen werden, so muß auch M r den Mittelpunkt des Krümmungskreises treffen. Der Punkt C also, in welchem beide Linien p C und M r einander begegnen, ist des Krümmungskreises Mittelpunkt, mithin M C der Halbmesser desselben; und da in den beiden Dreiecken M p C, und M R r, M = M, M p C = M R r, folglich auch M C p = M R r, so sind diese beide Dreiecke einander ähnlich, also

$$MC : Mp = MR : Mr$$

und daher

$$MC = \frac{Mp \cdot MR}{Mr}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} MR \cdot MR}{Mr}$$

$$= \frac{MR^2}{2Mr}.$$

=

$$= \frac{(2MB.\sqrt{(2MB.Mr):n})^2}{2Mr}$$

$$= \frac{4MB^2.2MB.Mr}{2Mr.n^2}$$

$$= \frac{4MB^3}{n^2};$$

Die übrige Sätze dieses Buchs, und das ganze dritte Buch sind leicht zu verstehen, und werden daher hier übergangen.

Viertes Buch.

§. 2.

Es stelle u jede andere Ordinate und z jede andere Abscisse vor, so ist

$$y^2 = nx \text{ und}$$

$$u^2 = nz,$$

mithin

$$y^2 : u^2 = nx : nz$$

$$= x : z;$$

Es sind also die Quadraten ꝛc.

§. 3. Aus §. 6 Einl. erhellet schon, daß für $x = a + z + cu$ und $y = b + fu$ die neue Abscissenaxe mit dem Durchmesser parallel laufe, und die neue Applikatenaxe eine jede beliebige Lage haben kann. Ist nun

FE =

$$FE = \frac{2b \cdot IE}{n};$$

so ist, da $IF : FE = 1 : c$,

$$c \cdot IF = \frac{2b \cdot IE}{n}$$

und

$$nc = \frac{2b \cdot IE}{IF};$$

weil aber

$$IF : IE = 1 : f;$$

mithin $\frac{IE}{IF} = f$; so ist

$$nc = 2bf, \text{ folglich}$$

$$nc - 2bf = 0;$$

Da nun

$$f^2u^2 + b^2 = an + nz + (nc - 2bf)u;$$

so verschwindet das letzte Glied in dieser Gleichung, und man erhält

$$f^2u^2 + b^2 = an + nz;$$

§. 5. Da jeder Durchmesser der Parabel nur einmal begegnet (§. 1.) so folgt aus (14. II.), daß

$$AT = AP;$$

Es läßt sich ferner leicht begreifen, daß

$$TF = FB;$$

Nun ist aber $TF = FM$ (§. 7.)

Folglich

Folglich $FM = FB$;

und daher $FMB = FBM$;

Man ziehe nun auf MF aus B eine Linie BL senkrecht, so ist

$$MLB = MPB$$
$$LMB = PBM \text{ und}$$
$$BM = BM$$

Folglich auch

$$PB = ML = \tfrac{1}{2} n \text{ (nach §. 23. II.)}$$

Also ist in der Parabel die Subnormale eine beständige Linie

Ich will hier noch einige Sätze, welche die Berechnung einiger anderer hier vorkommenden Linien betreffen und sich auf die drei verschiedene Arten von Kegelschnitten (§. 4. 5. 6. III.) beziehen, beifügen.

Bei der Hyperbel und Ellipse ist die Axe $= \mp \frac{n}{m^2}$,

wobei ich ein für allemal erinnere, daß das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt. Nennt man also die Axe a, so ist

$$a = \mp \frac{n}{m^2}$$

und

$$m^2 = \mp \frac{n}{a};$$

Man sieht leicht, daß ebendieses auch für die Parabel gelte; denn bei ihr ist $a = \infty$, mithin $\frac{n}{a} =$

$= \frac{n}{\infty} = 0$, welches auch der Werth von m bei der Parabel ist nach (§. 4. III.). Ich werde mich in der Folge dieser Substitution des Werths von m^2 bedienen. Die hierher gehörige Aufgaben sind folgende:

I. Eine Gleichung für die Subtangente S bei jedem Kegelschnitt zu finden.

Aufl. Weil überhaupt

$$S = x \mp x \cdot \frac{p}{x \mp p}$$

so ist nach gehöriger Substitution

$$S = x \mp x \cdot \frac{n : 2m^2}{x \mp n : 2m^2}$$

$$= x \mp x \cdot \frac{n : \frac{2n}{a}}{x \mp n : \frac{2n}{a}}$$

$$= x \mp x \cdot \frac{\frac{1}{2}a}{v \mp \frac{1}{2}a}$$

$$= x \mp \frac{ax}{2x \mp a}$$

$$= \frac{2x^2 \mp ax \mp ax}{2x \mp a}$$

=

$$= \frac{2x^2 \pm 2ax}{2x \pm a}$$

$$= \frac{x^2 \pm ax}{x \pm \frac{1}{2}a}$$

Für die Parabel läßt sich diese Gleichung dadurch, daß man $a = \infty$ setzt, einfacher ausdrucken. Man erhält nämlich dadurch

$$S = \frac{x^2 \pm x \cdot \infty}{x \pm \frac{1}{2}\infty};$$

wo im Zähler das x^2 und im Nenner das x verschwinden; und es bleibt noch

$$S = \frac{x \cdot \infty}{\frac{1}{2} \cdot \infty}$$

$$\infty = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x;$$

II. Eine Gleichung für die Tangente zu finden.

Aufl. Sie heisse T, so ist

$$T = S^2 \pm y^2$$

$$= \left(\frac{\pm ax \pm x^2}{x \pm \frac{1}{2}a}\right)^2 \pm m^2x^2 \pm nx$$

$$= \left(\frac{x^2 \pm ax}{x \pm \frac{1}{2}a}\right)^2 \pm \frac{nx^2}{a} \pm nx$$

$$= \frac{a(x^2 \mp ax)^2 \mp nx^2(x \mp \frac{1}{2}a)^2 \mp anx.(x \mp \frac{1}{2}a)^2}{a.(x \mp \frac{1}{2}a)^2}$$

$$= \frac{a(x^2 \mp ax)^2 \mp (nx^2 \mp anx).(x \mp \frac{1}{2}a)^2}{a.(x \mp \frac{1}{2}a)^2}$$

$$= \frac{ax^2.(x \mp a)^2 \mp nx(x \mp a).(x \mp \frac{1}{2}a)^2}{a.(x \mp \frac{1}{2}a)^2}$$

$$= \frac{(ax^2.(x \mp a) \mp nx.(x \mp \frac{1}{2}a^2).(x \mp a)}{a.(x \mp \frac{1}{2}a)^2}; \text{ N.)}$$

Für $a = \infty$ gilt dieser Ausdruck auch bei der Parabel; in dem Fall aber läßt sie sich einfacher ausdrucken; man erhält nämlich, wenn man $a = \infty$ setzt, aus N.

$$T = \frac{\infty.x^2.\infty \mp \frac{1}{4}nx.\infty^2}{\frac{1}{4}\infty^2}$$

$$= \frac{x^2 \mp \frac{1}{4}nx}{\frac{1}{4}}$$

$$= 4x^2 \mp nx;$$

Auf diesen Ausdruck kommt man kürzer so: es ist

$$T = S^2 \mp y^2$$

$$= 4x^2 \mp nx$$

weil in der Parabel $S = 2x$ und $y = nx$;

III. Einen Ausdruck für die Subnormale zu finden.

Aufl. Sie ist $= \pm m^2 (x \pm p)$. (§. 23. II.)

$$= \pm \frac{n}{a} \left(x \pm \frac{n}{2m^2} \right)$$

$$= \pm \frac{n}{a} x \pm \frac{n}{a} \cdot \frac{n}{2n:a}$$

$$= \pm \frac{n}{a} x \pm \tfrac{1}{2} n,$$ und für $a =$

∞, ist sie $= \frac{1}{2} n$, wie auch aus dem Anfang dieses §. erhellet

IV. Einen Ausdruck für die Normale zu finden.

Aufl. Sie heisse P, so ist

$P^2 = (m^2 \pm 1) y^2 \pm \frac{1}{4} n^2$ (§. 23. II.)

$= \frac{1}{4} n^2 \pm (1 \pm m^2) . (n x \pm m^2 x^2)$

$$= \tfrac{1}{4} n^2 \pm \left(1 \pm \frac{n}{a} \right) . \left(n x \pm \frac{n}{a} x^2 \right)$$

$$= \tfrac{1}{4} n^2 \pm n x \pm \frac{n x^2}{a} \pm \frac{n^2 x}{a} \pm \frac{n^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4} a^2 n^2 \pm a^2 n x \pm a n x^2 \pm a n^2 x \pm n^2 x^2}{a^2}$$

$$= \frac{n . \left(n . (\tfrac{1}{4} a^2 \pm a x \pm x^2) \pm a^2 x \pm a x^2 \right)}{a^2}$$

$$= \frac{n.\left(n.\left(\frac{1}{2}a \mp x\right)^2 \mp ax.(a \mp x)\right)}{a^2}$$

$$= nx \mp \tfrac{1}{4}n^2 \text{ für } a = \infty.$$

V. Einen Ausdruck für das Stück AT der verlängerten Axe, das von dem Scheitelpunkt bis an die Tangente reicht, zu finden.

Aufl. Es ist $AT = \frac{px}{x \mp p}$

$$= \frac{(n : 2m^2)\,x}{x \mp n : 2m^2}$$

$$= \frac{\mp \frac{1}{2}ax}{x \mp \frac{1}{2}a}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a \mp x} \text{ also für } a = \infty$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x \,.\, \infty}{\frac{1}{2}\infty} = x;$$

VI. Eine Gleichung für die Linie, welche senkrecht auf der Spitze der Axe steht, und bis an die Tangente reicht, anzugeben.

Aufl. Sie ist $= \frac{py}{x \mp 2p}$

$$= \frac{p.\sqrt{(m^2x^2 \mp 2m^2px)}}{x \mp 2p};$$

heißt

heiſt ſie M, ſo iſt nun

$$M^2 = \frac{p^2.(m^2x^2 + 2m^2px)}{(x+2p)^2}$$

$$= \frac{a^2.\left(\frac{n}{a}x^2 + nx\right)}{4(x+a)^2}$$

$$= \frac{anx^2 + a^2nx}{4(x+a).(x+a)}$$

$$= \frac{(x+a).anx}{4.(x+a).(x+a)}$$

$$= \frac{anx}{4(x+a)}$$ also für $a = \infty$

$$= \frac{\infty.nx}{4.\infty}$$

$$= \tfrac{1}{4}nx;$$

VII. Die Entfernung des Scheitelpunkts von der Tangente zu finden.

Aufl. Sie iſt $= \frac{px.\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + (1 \pm m^2)y^2\right)}}{x^2 + 2px \pm m^2(x+p)^2}$

$$= \frac{\pm\frac{1}{2}ax\sqrt{\left(\frac{1}{4}n^2 + \left(1 \pm \frac{n}{a}\right)y^2\right)}}{x^2 \pm \left(ax + \frac{n}{a}\left(x + \frac{1}{2}a\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\mp \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{\left(\frac{1}{4} n^2 \mp \frac{a y^2 \mp n y^2}{a}\right)}}{a x^2 \mp \left(a^2 x \mp n (x \mp \frac{1}{2} a)^2\right)}$$

Nun ist aber $y^2 = m^2 x^2 \mp 2 m^2 p x$

$$= n x \mp \frac{n x^2}{a}\,,$$

also obige Entfernung

$$= \frac{\mp \frac{1}{2} a^2 x \sqrt{\left(\frac{1}{4} n^2 \mp \frac{a n x \mp n x^2 \mp n^2 x \mp n^2 x^2 : a}{a}\right)}}{a x^2 \mp \left(a^2 x \mp n . (x \mp \frac{1}{2} a)^2\right)}$$

also für $a = \infty$,

$$= \frac{\frac{1}{2} \infty^2 x \sqrt{(\frac{1}{4} n^2 \mp n x)}}{(x \mp \frac{1}{4} n) . \infty^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x . \sqrt{(\frac{1}{4} n^2 \mp n x)}}{x \mp \frac{1}{4} n}\,;$$

VIII. Einen andern Ausdruck für FM, als den (§. 22. II.) zu finden.

Aufl. Es ist

$$FM = q \mp x \sqrt{(1 \mp m^2)} \quad (\S. 22. II.)$$

$$= q \mp x . \sqrt{\left(1 \mp \frac{n}{a}\right)}$$

Nun

Nun ist aber $\sqrt{\left(1 \mp \frac{n}{a}\right)}$ der Quotient von

$$\frac{\frac{1}{2}n \mp \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}a\sqrt{\left(1 \mp \frac{n}{a}\right)}}{\mp \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\left(1 \mp \frac{n}{a}\right)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n - q}{q} \text{ (§. 22. II.)}$$

Also ist

$$FM = q \mp x \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}n - q}{q}\right);$$

Diesen Sätzen will ich noch einige beifügen, welche die Verzeichnung einiger der genannten Linien betreffen.

1. Aus §. 15. V. u. §. 7. IV. ist $abc = db\gamma$, (Fig. 26, 27, 28.) folglich $abf = fb\gamma$; man ziehe ferner ag durch die Normale bf senkrecht, so ist $bea = beg$, und $be = be$, also $\triangle abe = \triangle beg$, und $ba = bg$. Also trift die Linie ag die $b\gamma$, so, daß $bg = ba$ wird, und wenn man $bg = ba$ macht, und durch die Punkte a, g die grade Linie ag zieht, so ist ag der verlängerte Perpendikel ae. Weil nun die Tangente cd in b gleichfalls auf bf senkrecht stehen muß, so muß nothwendig dieselbe mit ag parallel laufen.

Anmerk. Bei der Hyperbel muß man, um $b\gamma$ zu erhalten, Gb verlängern; in der Parabel aber darf man nur $b\gamma$ mit der Axe AB paral-

lel ziehen, weil der andere Brennpunkt von b unendlich weit entfernt ist.

2. Zus. Um also an einen gegebenen Punkt b (Fig. 26, 27, 28.) eine Tangente zu ziehen, so mache man den Winkel a b γ, und aus demjenigen Brennpunkt a, welcher dem b am nächsten liegt, ziehe man nach dem längern Schenkel b γ des verzeichneten Winkels eine grade Linie a g, so, daß b g = b a wird, so ist die Linie c b d, welche mit der a g parallel lauft, die Tangente.

3. Zus. Soll also die Tangente mit der Axe parallel laufen, so muß b c f = g a f = o werden, folglich der Punkt g in die Axe fallen, welches nur bei der Ellipse angeht. Denn bei der Parabel ist b γ der Axe A B parallel, und bei der Hyperbel entfernt sich b γ immer mehr von A B. Es giebt demnach bei der Hyperbel und Parabel keine Tangente, die mit der Axe parallel lauft.

4. Zus. M R, F B (Fig. 29.) seien zwei Perpendikel auf T M, und F q stehe auf M R senkrecht, so ist M q = B F; da nun M R = 2 B F, so muß M q = q R sein, und da F q = F q, und bei q rechte Winkel sind, so ist △ F M q = △ F R q, mithin ∠ M F q = ∠ q F R. Hieraus fliest noch eine Art, an jeden Punkt M einer Parabel eine Tangente oder Normale zu ziehen. Nämlich

„Man ziehe M F, und theile den Winkel
„M F R durch F R in zwei gleiche Theile.
„Durch diese F r ziehe man die M R senkrecht,

„so

„so hat man die Normale. Die mit Fr durch „M parallele Linie TM ist die Tangente.“

5. Zus. Aus dem Vorhergehenden erhellet, wenn cd eine Tangente in b ist, (Fig. 26, 27, 28.) ba und bγ die aus dem Berührungspunkt b nach beiden Brennpunkten gezogene Linien sind, bg = ba genommen wird, und bf die zu dem Punkt b gehörige Normale ist, daß alsdann das △ abf = △ bfg, mithin der ∢ abf = fbg ist. Die Normale bf theilt folglich den Winkel abγ in zwei gleiche Theile.

6. Zus. Wenn man daher in einen gegebenen Punkt b eine Normale ziehen will, so verzeichne man nur den Winkel abγ; die Linie bf, die denselben in zwei gleiche Theile theilt, ist die Normale.

§. 6. Da $MT^2 = MP^2 + TP^2$

und $AT = AP$

so ist

$$MT^2 : AT = (MP^2 + TP^2) : AP$$

Nun ist

$$TP = 2AP$$

also $TP^2 = 4AP^2$

und da in der Parabel das Quadrat der Applikate allemal dem Rechteck aus der zugehörigen Abscisse, und dem Parameter ihres Durchmessers gleich ist, so ist

$$MP^2 = n.AP$$

Folglich

$$MT^2 : AT = (MP^2 + TP^2) : AP$$

$$= \frac{n \cdot AP + 4AP^2}{AP}$$

$$= n + 4AP$$

Zieht man nun aus M einen andern Durchmesser MK, so ist, da in der Parabel alle Durchmesser mit einander parallel laufen, $MK \parallel AT$, und, wenn man aus A, die Linie $AK \parallel TM$ zieht, so wird

$$MK = AT;$$

$$AK = TM;$$

Folglich

$$MT^2 : AT^2 = AK^2 : MK^2;$$

Es sei AK nicht zu MK geordnet, und man nehme an, es sei eine andere z. B. KR, die der Tangente MT nicht gleichlaufend ist, zu dem Durchmesser MK geordnet, so müßte die mit dieser KR durch M parallel gezogene Linie an M eine Berührungslinie sein; da nun diese von der MT nothwendig verschieden sein muß, und MT eine Tangente an M ist, so ist offenbar die mit KR an M gleichlaufende Linie keine Tangente; folglich kann KR keine zu MK geordnete Linie sein, und es ist falsch, daß AK nicht zu MK geordnet wäre.

Daraus nun, daß KA zu MK geordnet ist, folgt nach (§. 2.), daß

$$\mu \cdot MK = AK^2;$$

folglich

folglich $\mu = \frac{AK^2}{MK}$;

also $\frac{AK^2}{MK} = \frac{MT^2}{AT} = n + 4AP = \mu$

Mithin ist der Parameter eines jeden Durchmessers u. s. f.

§. 7. Man verlängere FM nach N, (Fig. 30.) so wird

$NML = TMF;$

und $NMK = MFB;$

$= FTM + FMT;$

$= 2TMF;$

$= 2NML;$ folglich

$NML = LMK;$

Nun ist

$TMF = NML$

also $TMF = LMK;$

Es fällt also jede mit TB gleichlaufende Linie KM auf die Tangente TM in dem Punkt M unter einem Winkel $LMK = TMF = \frac{1}{2}MFB$, und alle mit TB gleichlaufende Linien also, die unter dem nämlichen Winkel von M aus nach der Axe zu gehen, unter welchem sie auf die Tangente in M gefallen sind, gehen insgesamt durch den Brennpunkt F.

MAP (Fig. 31.) sei die innere Hölung eines parabolisch gekrümmten Spiegels, dessen Axe AQ

nach

nach G, welches die Sonne vorstellen soll, gerichtet sei, AF sei $= \frac{1}{4}n$, also F der Brennpunkt. Da nun die Punkte Mnopqrst und überhaupt alle Punkte der ganzen Paraboloide so weit von G abstehen, daß der Winkel, den die Strahlen MG, nG, oG u. s. w. mit der Axe AG machen, als unendlich klein angesehen werden kann, so kann man annehmen, daß alle Strahlen, die von G aus nach M, n, o &c. gehen, einander parallel seien. Es laufen also alle Strahlen GM, Gn, Gq u. s. w. mit der Axe AG parallel. Nun lehrt die Optik, daß alle Strahlen unter ebendem Winkel von einem Spiegel zurückprallen, unter welchem sie auf denselben fallen; und es ist also aus dem, was vorher gesagt worden, klar, daß alle Strahlen, die von G aus in die Hölung des Spiegels MAP fallen, insgesamt durch F reflectirt werden. Befindet sich daher in F ein Körper, so fallen alle Strahlen, die in der ganzen Fläche des Spiegels zerstreut liegen, auf dieses Object, so, daß sich in diesem Punkt Körper entzünden lassen.

§. 8. Aus der Verhältnis

$$FA : FO = FO : FM$$

folgt:

$$FO = \sqrt{(FA \cdot FM)};$$

$$= \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}n \cdot (x + \tfrac{1}{4}n)\right)};\ (\S.\ 21.\ 22.\ II.)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(nx + \tfrac{1}{4}n^2)}$$

Nun ist aber (§. 5.) gezeigt worden, daß bei der Parabel die Normale $= \frac{1}{4}\sqrt{(nx + \frac{1}{4}n^2)}$, folglich ist

FO

FO oder die Entfernung des Brennpunkts von der Tangente der halben Normale MB gleich. Weil aber ausserdem auch

$$FO = \frac{n \cdot FM}{2 \cdot MB} \text{ (§. 24. II.)}$$

$$\text{mithin } \frac{MB}{2} = \frac{n \cdot FM}{2 \cdot MB}$$

$$\text{so ist } MB^2 = n \cdot FM;$$

und hieraus ergiebt sich

$$n : MB = MB : FM$$

„Also ist die mittlere Proportionallinie zwischen „dem Parameter und irgend einer Brennpunkts„linie (*) die zu dieser Brennpunktslinie gehörige „Normale.“

Es ist ferner klar, daß die Quadrate der Normalen mit den zugehörigen Brennpunktslinien in einem beständigen Verhältnis stehen, und zwar in ebendem Verhältnis wie die Quadrate der Ordinaten zu ihren Abscissen. Denn es ist überhaupt in der Parabel

$$y^2 =$$

(*) Brennpunktslinien werde ich in der Folge jede Linie nennen, welche aus dem Brennpunkt in irgend einen Punkt des Kegelschnitts gezogen ist. Was ich jedesmal unter Linien, die einander zugehören, verstehe, ist leicht einzusehen. So ist $\beta\gamma$ (Fig. 32.) die zu der Brennpunktslinie gehörige Tang. ; $\beta\delta$ die dazu gehörige Normale ; $\delta\varepsilon$ die dazu gehörige Subnormale u. s. w.

$$y^2 = n\,x\text{; (§. 4. III.);}$$

also $$\frac{y^2}{x} = n\text{;}$$

Da nun $MB^2 = n.FM$,

so ist auch $\frac{MB^2}{FM} = n$;

Dieses giebt

$$y^2 : x = MB^2 : FM\text{;}$$

§. 9. Also ist

$$AG = \tfrac{1}{4}n\text{;}$$

§. 10. Es ist

$$FM = AF + AP$$
$$= 2AF + FP,$$

und $$MH = FP$$

also

$$FM - MH = 2AF + FP - FP = 2AF$$
$$= \tfrac{1}{2}n, \text{ weil } AF = \tfrac{1}{4}n\text{;}$$

Verlängert man also die im Brennpunkt F stehende Ordinate FI, und fällt auf der Ordinate angesetzte Stück IH aus irgend einem Punkt der Parabel M einen Perpendikel MH, so ist die Differenz der aus M gezogenen Brennpunktslinie MF, und des auf ihr stehenden Perpendikels MH allemal dem halben Parameter gleich; folglich ist diese Differenz eine beständige Grösse.

Es

Es ist ferner

$$FL = AF + AR$$

und

$$LH = RF$$

also

$$FL + LH = AF + AR + RF$$
$$= 2AF$$
$$= \tfrac{1}{2}n;$$

Zieht man also aus irgend einem Punkt der Parabel (L.) auf die in dem Brennpunkt befindliche Ordinate (FI) eine Linie (LH) senkrecht, und aus ebendem Punkt (L.) eine Brennpunktslinie (LF), so ist die Summe des Perpendikels und der Brennpunktslinie allemal dem halben Parameter gleich, demnach auch eine beständige Linie.

§. 11. Aus der Gleichung

$$\mu = 4ME$$

wo die Bedeutung, wie §. 6. hat, folgt eine Art, jedes Durchmessers Parameter geometrisch zu ziehen; man ziehe nämlich aus der Spitze eines solchen Durchmessers M eine Linie MP auf die Axe AB senkrecht, und mache $AG = \tfrac{1}{4}n$ (§. 9.), so ist $4PG = \mu$. Hieraus folgt die Verhältnis

$$\mu : \nu = GP : GA;$$

denn es ist $GP = ME = \tfrac{1}{4}\mu$, und $GA = \tfrac{1}{4}n$, also

$$GP : GA = \tfrac{1}{4}\mu : \tfrac{1}{4}n$$
$$= \mu : n;$$

§. 12.

§. 12. Diejenige Ordinate auf der Axe AB, die ihrer zugehörigen Abscisse gleich ist, berührt den Krümmungskreis in Q. Denn für $y = x$, wird $y^2 = x^2 = nx$; folglich $x = n = AQ$, woraus erhellet, daß eine solche Ordinate in Q auf AQ senkrecht steht, und demnach den Kreis in Q berührt (§. 6. II.).

Fünftes Buch.

§. 1.

Wenn man die Abscissen von der Spitze des Durchmessers m nach G zu gerechnet x, und jede von dem Mittelpunkt des Durchmessers C aus nach G zu genommene Abscisse z nennt, so ist jedes $x = mC \pm z$; z. B. $mf = mC \pm Cf = mC \pm z$; dieses bleibt richtig, wenn auch gleich $x < mC$ sein sollte. Alsdann wird nämlich z negativ, und die Gleichung $x = mC \pm z$, zeigt an, daß z von mC abgezogen werden müsse. So ist z. B. $mF = mC - CF = mC \pm z$, wo $z = -CF$, denn es müßte eine der CF gleiche Linie von C nach G zu liegen, wenn sie z heissen sollte; da nun CF hier von C nach m zu liegt, so hat offenbar CF eine der z entgegengesetzte Lage, und ist also $CF = -z$, oder $z = -CF$. Also ist allemal $x = mC \pm z$; nur ist z für $x < mC$ negativ. Nun aber ist $mC = \frac{1}{2} mG = \frac{1}{2}(n : \pm m^2) = n : \pm 2m^2$,

Folglich

Folglich

$$x = n : \pm 2m^2 \pm z$$

und

$$x^2 = \frac{n^2}{4m^4} \mp \frac{nz}{m^2} \pm z^2$$

Diese Werthe statt x und x^2 in die Gleichung

$$y^2 \pm m^2 x^2 \mp nx = 0$$

gesetzt, geben

$$0 = y^2 \pm \frac{n^2}{4m^2} \mp nz \pm m^2 z^2 \mp \frac{n^2}{\pm 2m^2} \mp nz$$

$$= y^2 \pm \frac{n^2}{\pm 4m^2} \pm m^2 z^2 \mp \frac{2n^2}{\pm 4m^2}$$

$$= y^2 \pm m^2 z^2 \mp \frac{n^2}{\pm 4m^2};$$

Folglich

$$y = \sqrt{\left(\frac{n^2}{\pm 4m^2} \mp m^2 z^2\right)};$$

Da nun z^2 allemal bejaht bleibt, z mag positiv oder negativ genommen werden, so erhellet, daß auch y beständig gleichgroß bleibt, z mag positiv oder negativ sein; d. i. man mag gleichgrosse z von C nach m, oder von C nach G zu nehmen, so ist die dazugehörige Ordinate allemal gleich groß

§. 2. Die im vor. §. gefundene Gleichung

$$y^2 \pm m^2 z^2 \mp \frac{n}{\pm 4m^2} = 0$$

bezieht sich auf die Abscissenaxe CG oder Cm und Applikatenaxe CB, wo also beide Axen in C zusammenstoßen. Nimmt man nun statt dieser beiden Axen zwei andere, die gleichfalls in C zusammenstoßen, so wird

$$z = p\omega - ru \text{ und}$$

$$y = su - q\omega;$$

wenn man (§. 6. Anm. n. IV. Einl.) statt c, d, e, f; r, p, q, s; und statt z; ω setzt; (*) dadurch erhält man statt der vor. Gl. die (A.), woraus sich das Folgende in diesem §. einsehen läßt.

§. 4. BL sei zu od geordnet, so ist jede mit BL gleichlaufende Linie mn, rq u. s. w. eine Ordinate auf od, wenn od ein Durchmesser ist, mithin $mn = ns = \frac{1}{2}ms$; $rq = qT = \frac{1}{2}rT$; nun aber ist (§. 3.) BL zu CL geordnet, und daher $am = as = \frac{1}{2}ms$; $br = bT = \frac{1}{2}rT$ u. s. w. also ist es falsch, daß $mn = \frac{1}{2}ms$; $rq = \frac{1}{2}rT$; und rq, mn, BL u. s. w. können daher nicht zu od geordnet sein. Folglich ist od kein Durchmesser.

§. 5. Es muß also bei der Ellipse und Hyperbel allemal diejenige zu einem Durchmesser geordnete Applikate, welche durch den Mittelpunkt C geht, ein zugeordneter Durchmesser sein.

§. 6.

(*) so daß $\frac{Li}{Lr} = s$, $\frac{ri}{Lr} = r$, $\frac{Ci}{CL} = p$, und $\frac{Li}{CL} = q$ ist.

§. 6. Aus §. 3. ist $s^2u^2 \mp q^2\omega^2 \mp m^2p^2\omega^2 \mp m^2r^2u^2 - \frac{n^2}{\mp 4m^2} = o$, wo die obern Zeichen auf die Ellipse, die untern auf die Hyperbel gehen. Es ist demnach für die Ellipse, wenn $u = o$ wird, $q^2\omega^2 \mp m^2p^2\omega^2 = \frac{n^2}{4m^2}$, also $\omega = \mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2.(q^2 \mp m^2p^2)}\right)}$; also hat ω bei der Ellipse für $u = o$ allemal zweene wirkliche Werthe. Oder es giebt auf jedem Durchmesser der Ellipse zweene Punkte, da die Applikate $u = o$ ist. Folglich muß er die krumme Linie zweimal durchschneiden; daß also jeder Durchmesser in ihr zwo Spitzen hat.

Bei der Hyperbel wird für $\omega = o$, $s^2u^2 - m^2r^2u^2 = \frac{n^2}{-4m^2}$, also $u = \mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.(r^2 - m^2r^2)}\right)}$; und für $u = o$ erhält man $q^2\omega^2 - m^2p^2\omega^2 = \frac{n^2}{-4m^2}$, mithin

$$\omega = \mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.(q^2 - m^2p^2)}\right)}, \text{ oder}$$

$$\omega = \mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.(s^2 - m^2r^2)}\right)}$$

und $u = \mp\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.(q^2 - m^2p^2)}\right)}$ also

wo ω und u zugeordnete Halbmesser vorstellen (§. 5.); nun ist für die Hyperbel $qs - m^2pr = 0$, also $qs = m^2pr$, und $q^2s^2 = m^2p^2.m^2r^2$; dieses giebt

$$m^2r^2 = \frac{q^2s^2}{m^2p^2}, \text{ folglich } \omega = \sqrt{\frac{n^2}{-4m^2.(s^2 - m^2r^2)}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.\left(s^2 - \frac{q^2s^2}{m^2p^2}\right)}\right)} =$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{n^2.m^2p^2}{-4m^2(s^2m^2p^2 - q^2s^2)}\right)} =$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{n^2m^2p^2}{-4m^2s^2.(m^2p^2 - q^2)}\right)}; \text{ ist nun}$$

$mp > q$ also $m^2p^2 > q^2$, so wird $q^2 - m^2p^2$ verneint, mithin $-4m^2.(q^2 - m^2p^2)$ bejaht, folglich beide Werthe von $u = \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{-4m^2.(q^2 - m^2p^2)}\right)}$ wirklich. Hingegen wird für diesen Fall $m^2p^2 - q^2$ bejaht, folglich $-4m^2s^2(m^2p^2 - q^2)$ verneint, und die beiden Werthen von $\omega = \pm\sqrt{\left(\frac{n^2m^2p^2}{-4m^2s^2(m^2p^2 - q^2)}\right)}$ unmöglich; für $m^2p^2 < q^2$ ist das vorige umgekehrt. Der dritte Fall, da $mp = q$ wäre, findet hier nicht statt. Denn für $mp = q$ würde $qs = m^2pr = qmr$,

also $s = mr$, und in §. 3. $\frac{n^2}{-4m^2} = s^2u^2 \pm q^2\omega^2$

$q^2\omega^2 - q^2\omega^2 - s^2u^2 = o$; nun kann $\frac{n^2}{-4m^2}$ nur in zweenen Fällen $= o$ werden, nämlich für $m = \infty$, und $n = o$; da aber weder das eine noch das andere hier statt findet aus (Anm. §. 20. II.), so ist beständig $mpin = q$; hieraus ist demnach klar, daß allemal, nachdem $mp > q$ oder $mp < q$, entweder beide Werthe von u wirklich, und die von ω eingebildet, oder beide von u eingebildet, und die von ω wirklich sind. Dieses will nun soviel sagen, man mag bei der Hyperbel ein Paar von zusammengeordneten Durchmessern nehmen, welches man will, so wird allemal der eine von ihnen die krumme Linie zweimal, der andere sie gar nicht schneiden.

§. 7. Hier sind Lr, Li das, was §. 6. Einl. Anm. n. 4. DH, DM waren; nun ist DH : DM $=$ 1 : f; da also hier s statt dem dortigen f steht, wie schon §. 2. Anm. erwähnt worden, so ergiebt sich Lr : Li $=$ 1 : s. Aus ebendem Grund erhält man die übrigen Proportionen. Die beiden erstern Lr : Li $=$ 1 : s und Lr : ri $=$ 1 : r geben 1.) Lr $=$ Li : s 2.) Lr $=$ ri : r, also Li : s $=$ ri : r oder Li : ri $=$ s : r; ebenso folgt aus den beiden letztern 1.) CL $=$ Ci : p 2.) CL $=$ Li : q, mithin Ci : p $=$ Li : q, oder Ci : Li $=$ p : q. Nun ist Lir $= 90°$, also iLr + Lri $= 90°$; sollte also ab ein Hauptdurchmesser, mithin CLr $= 90°$ sein, so erhielte man CLr $=$ CLi + iLr $= 90° =$ iLr + Lri, also CLi $=$ Lri; und da überdas CiL $=$ Lir, so wäre $\triangle$ CLi $\sim \triangle$ Lir, folglich Ci : Li

$= Li : ir$; nun ist aber $Ci : Li = p : q$, und $Li : ir = s : r$, demnach wäre $p : q = s : r$ und $qs = pr$, und der Kegelschnitt müßte eine Kreislinie sein, wie aus dem Aut. erhellet. Hieraus folgt also, daß keiner der übrigen Kegelschnitte mehr als ein Paar rechtwinklicht zugeordnete Durchmesser, oder nicht mehr, als zween Hauptdurchmesser haben kann.

§. 8. Da die Abscissen z von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden, so ist klar, daß für $z = o$, die Applikate y in den Mittelpunkt C fallen muß, folglich ein dem Halbmesser Cm, welcher für den Haupthalbmesser angenommen wird, zugeordneter Halbmesser wird (§. 5.); setzt man also in der Gleichung $y^2 \mp m^2 z^2 - \frac{n^2}{\mp 4 m^2} = o$ (§. 1.) $z = o$,

so ergiebt sich der Werth für ein y, welches ein dem Haupthalbmesser Cm zugeordneter Halbmesser ist, nämlich $y^2 = \frac{n^2}{\mp 4 m^2}$. Statt diesem doppelten Werth von y^2 setze man $\mp b^2$, und statt Cm^2, a^2; so ist $\mp b^2 = \frac{n^2}{\mp 4 m^2}$ und $a^2 = \left(\frac{mG}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{\mp 2 m^2}\right)^2$ (§. 1.) $= \frac{n^2}{4 m^4}$, wo also a^2, b^2, die Quadrate zugeordneter Haupthalbmesser sind, aus welchen sich der Werth von m^2 bestimmen läßt. Es

folgt nämlich aus $\frac{n^2}{\mp 4m^2} = \mp b^2$, $\frac{n^2}{b^2} = 4m^2$,

und aus $\frac{n^2}{4m^4} = a^2$ ergiebt sich $\frac{n^2}{a^2} = 4m^4$,

also $m^2 = \frac{4m^4}{4m^2} = \frac{n^2 : a^2}{n^2 : b^2} = \frac{b^2}{a^2}$; diesen Werth statt m^2 in die Gleichung $y^2 \mp m^2 z^2 - \frac{n^2}{\mp 4m^2} = o$ (§. 1.) gesetzt, giebt $y^2 \mp \frac{b^2 z^2}{a^2} \mp b^2 = o$. Schreibt man in dieser Gleichung, wie (§. 2.) statt z, $p\omega - ru$, statt y, $su - q\omega$, so ergiebt sich eine Gleichung, in welcher sich die Abscissen und Ordinaten auf jede Abscissen- und Applikatenaxe, die in C zusammenstosen, beziehen. Man erhält nämlich

$$(su-q\omega)^2 \mp \frac{b^2.(p\omega-ru)^2}{a^2} \mp b^2 = s^2u^2 - 2q\omega su$$
$$\mp q^2\omega^2 \mp \frac{(b^2p^2\omega^2 - 2b^2p\omega ru \mp b^2r^2u^2)}{a^2} \mp b^2$$
$$= s^2u^2 \mp q^2\omega^2 \mp b^2p^2\omega^2 : a^2 \mp b^2r^2u^2 : a^2 \mp b^2$$
$$- (s \mp b^2pr : a^2)\, 2\omega u = o;$$

nun ist aber aus dem Vorhergehenden $\frac{b^2}{a^2} = m^2$,

also $qs \mp b^2pr : a^2 = qs \mp m^2pr = o$ (§. 3.)

Demnach $s^2u^2 \pm q^2\omega^2 \mp b^2p^2\omega^2 : a^2 \pm b^2r^2u^2 : \overline{a^2 \pm b^2} = o$; weil nun Cm, CB zween Haupt-Halbmesser sind, so ist aus (§. 7.) $s = \frac{Li}{Lr}$, $r = \frac{ri}{Lr}$, $q = \frac{Li}{CL}$, $p = \frac{Ci}{CL}$; *aber für* $\sin tot = 1$ ist $\frac{Li}{Lr} = \sin LrC$, $\frac{ri}{Lr} = Cos\, LrC$, $\frac{Li}{CL} = \sin aCr$, $\frac{Ci}{CL} = Cos\, aCr$, mithin $s = \sin LrC$, $r = Cos\, LrC$, $q = \sin aCr$, $p = Cos\, aCr$, und $p^2 \pm q^2 = \sin ACr^2 \pm Cos\, ACr^2 = 1$; ebenso $s^2 \pm r^2 = \sin LrC^2 \pm Cos\, LrC^2 = 1$; nun ist aus dem Vorherg. $qs \mp b^2pr : a^2 = o$, also $qs = \pm \frac{b^2pr}{a^2}$ und $q^2s^2 = b^4p^2r^2 : a^4$, folglich $q^2s^2a^4 : b^4p^2 = r^2$ und $s^2 \pm r^2 = s^2 \pm q^2s^2a^4 : b^4p^2 = 1$; demnach $s^2b^4p^2 \pm q^2s^2a^4 = b^4p^2$, und $s^2b^4p^2 \pm q^2s^2a^4 - b^4p^2 = o$; es ist aber $p^2 \pm q^2 = 1$; also $q^2 = 1 - p^2$, und $s^2b^4p^2 \pm (1 - p^2)s^2a^4 - b^4p^2 = s^2b^4p^2 \pm a^4s^2 - a^4s^2p^2 - b^4p^2 = o$; dieses giebt $a^4s^2 = (a^4s^2 \pm b^4 - s^2b^4)p^2$, und daher $p^2 = \frac{a^4s^2}{a^4s^2 \pm b^4 - s^2b^4}$ und $q^2 = 1 - p^2 = 1 - \frac{a^4s^2}{a^4s^2 \pm b^4 - s^2b^4} = \frac{a^4s^2 \pm b^4 - s^2b^4 - a^4s^2}{a^4s^2 \pm b^4 - s^2b^4} =$

$= \frac{b^4 - s^2 b^4}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}$; nun gilt die Gleichung A für jede Applikaten- und Abscissenaxe, die in C zusammenstosen. Nimmt man also CA zur Abscissen- und CM zur Applikatenaxe an, so wird für $u = o$, $\omega = Ca$, folglich aus (A) $Ca^2 = \mp b^2 a^2 : (a^2 q^2 \mp b^2 p^2)$ ebenso wird für $\omega = o$, $u = CM$, also aus (A) $\mp CM^2 = \mp b^2 a^2 : \left(a^2 s^2 \mp b^2 . \frac{q^2 s^2 a^4}{b^4 p^2} \right)$

$= \mp b^2 a^2 : \left(a^2 s^2 \mp \frac{q^2 s^2 a^4}{b^2 p^2} \right) = \mp b^4 a^2 p^2 :$ $(a^2 s^2 b^2 p^2 \mp q^2 s^2 a^4)$, da nun aus dem Vorherg. $p^2 = \frac{a^4 s^2}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}$, und $q^2 = \frac{b^4 - s^2 b^4}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}$, so erhält man $\mp CM^2 =$

$\left(\frac{\mp b^4 a^6 s^2}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4} \right) : \left(\frac{a^6 s^4 b^2}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4} \mp \frac{b^4 s^2 a^4 - s^4 b^4 a^4}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4} \right) = \frac{\mp b^4 a^6 s^2}{a^6 s^4 b^2 \mp b^4 s^2 a^4 \mp s^4 b^4 a^4}$,

oder Zähler und Nenner dieses Bruchs mit $b^2 a^4 s^2$ dividirt giebt

$\mp CM^2 = \frac{\mp b^2 a^2}{a^2 s^2 \mp b^2 \mp s^2 b^2}$;

Und so erhält man, wenn man die Werthe von p^2 und q^2 in der Gleichung für Ca^2 substituirt

$$Ca^2 = \frac{\mp b^2 a^2}{\frac{a^2 b^4 - a^2 s^2 b^4}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4} \mp \frac{a^4 s^2 b^2}{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}}$$

$$= \frac{\mp (a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4) . b^2 a^2}{a^2 b^4 - a^2 s^2 b^4 \mp a^4 s^2 b^2};$$ also wird,

indem man Zähler und Nenner durch $\mp b^2 a^2$, dividirt,

$$Ca^2 = \frac{a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}{\mp b^2 \mp s^2 b^2 \mp a^2 s^2};$$

Folglich

$$Ca^2 \mp CM^2 = \frac{\mp a^2 b^2 \mp a^4 s^2 \mp b^4 - s^2 b^4}{a^2 s^2 \mp b^2 \mp s^2 b^2};$$

$$a^4 s^2 \mp a^2 b^2 \mp b^4 - s^2 b^4 \,|\, a^2 \mp b^2$$

$$a^2 s^2 \mp b^2 \mp s^2 b^2$$

$$a^4 s^2 \mp a^2 b^2 \mp a^2 s^2 b^2$$

$$* \quad * \mp a^2 s^2 b^2 \mp b^4 - s^2 b^4$$

$$a^2 s^2 \mp b^2 \mp s^2 b^2$$

$$\mp a^2 s^2 b^2 \mp b^4 - s^2 b^4$$

$$* \quad * \quad *$$

Nun

Nun giebt die Division den Quotienten $a^2 \mp b^2$; da also a^2, b^2, die Quadrate zweener zugeordneter Haupthalbmesser vorstellen, so ist klar, daß bei der Ellipse die Summe, und bei der Hyperbel der Unterschied der Quadraten jeder zween einander zugeordneten Halbmessern, wie Ca^2, CM^2, allemal der Summe und dem Unterschied zweener einander zugeordneter Haupthalbmesser gleich sei; nun giebt es aber in keinem dieser beiden Kegelschnitte mehr, als ein Paar Haupthalbmesser nach (§. 7.); folglich ist in der Ellipse die Summe, und in der Hyperbel der Unterschied jeder zweener einander zugeordneter Halbmesser allemal einerlei, oder eine beständige Grösse.

§. 9. Dieser §. enthält die Auflösung der Aufgabe, die Verhältnis solcher Parallelogrammen gegen einander zu finden, die sich aus jeden einander zugeordneten Halbmessern, unter dem Winkel, welchen sie einschliesen, verzeichnen lassen. Dieses zu bestimmen, darf man nur die Verhältnis suchen, die jedes solches Parallelogramm zu dem Rectangel hat, dessen Seiten die beeden Haupthalbmesser sind, weil dasselbe eine beständige Grösse ist. CM, Cb seien also zween beliebige einander zugeordnete Halbmesser, so verlangt man die Verhältnis zu wissen, in der das Parallelogramm, welches MC, bC zu Seiten und MCB zu einem Winkel hat, zu dem Rectangel mCB steht; oder wenn MK auf bC senkrecht ist, so sucht man die Verhältnis MK . bC: MC . BC, welche sich auf folgende Art ergiebt. BE und Mn sind dem Durchmesser ab zugeordnet,

also einander gleichlaufend, und daher MCm = LrC, überdas ist mCb = aCr, folglich MCK = MCm ✣ mCb = LrC ✣ aCr; daraus läßt sich MK bestimmen. Es ist nämlich MK : MC = sin MCK : 1, also MK = sin MCK . MC = MC. sin (LrC ✣ ACr) = MC (sin LrC. Cos ACr ✣ Cos LrC. sin ACr) = MC. (sp ✣ rq) nun ist (§. 8.) $\underline{\pm}$ MC² = $\underline{\pm}$ b² a² : (a² s² $\underline{\pm}$ b² r²), also

$$MC.\sqrt{\underline{\pm}\,1} = \sqrt{\underline{\pm}\,MC^2} = \sqrt{\left(\underline{\pm}\,\frac{b^2a^2}{a^2s^2 \underline{\pm} b^2r^2}\right)} = \frac{ba\sqrt{\underline{\pm}\,1}}{\sqrt{(a^2s^2 \underline{\pm} b^2r^2)}},$$

und daher

$$MC = \frac{ba}{\sqrt{(a^2s^2 \underline{\pm} b^2r^2)}}$$

daraus wird

$$MK = \frac{ba}{\sqrt{(a^2s^2 \underline{\pm} b^2r^2)}}.(sp \pm rq),$$

und

$$bC.MK = bc.\frac{ba}{\sqrt{(a^2s^2 \underline{\pm} b^2r^2)}}.(sp \pm rq)$$

(P. aber aus (§. 3.) ist

$$Ca^2 = Cb^2 = \frac{\underline{\pm}\,b^2a^2}{a^2q^2 \underline{\pm} b^2p^2},$$

also

$$bC = \sqrt{\left(\frac{\underline{\pm}\,b^2a^2}{a^2q^2 \underline{\pm} b^2p^2}\right)} = \frac{ba\sqrt{\underline{\pm}\,1}}{\sqrt{(a^2q^2 \underline{\pm} b^2p^2)}};$$

Dieses in P gesetzt giebt

$$bC.MK = \frac{ba\sqrt{\underline{\pm}\,1}}{\sqrt{(a^2q^2 \underline{\pm} b^2p^2)}}$$

$$\times \frac{b\,a}{\sqrt{(a^2 s^2 \mp b^2 r^2}} \cdot (sp \mp rq) =$$

$$\frac{(b^2 a^2 \cdot \sqrt{\mp} 1) \cdot (sp \mp rq)}{\sqrt{(a^4 s^2 q^2 \mp a^2 b^2 q^2 r^2 \mp a^2 b^2 p^2 s^2 \mp b^4 r^2 p^2)}}$$

nun ist (§. 8.) $qs = \frac{\mp b^2 pr}{a^2}$, also $\mp b^2 pr = a^2 qs$, und $b^4 p^2 r^2 = \mp b^2 pr \cdot a^2 qs$, und ebenso $a^4 q^2 s^2 = a^2 sq \cdot b^2 pr$, also $a^4 s^2 q^2 \mp b^4 r^2 p^2 = \mp b^2 pr\, a^2 sq \mp a^2 sq\, b^2 pr = \mp 2 a^2 b^2 pqrs$, und daher $\sqrt{(a^4 s^2 q^2 \mp a^2 q^2 b^2 r^2 \mp a^2 b^2 p^2 s^2 \mp b^4 p^2 r^2)} = \sqrt{(\mp a^2 q^2 b^2 r^2 \mp a^2 b^2 p^2 s^2 \mp 2 a^2 b^2 pqrs)} = \sqrt{(\mp a^2 b^2 \cdot (q^2 r^2 \mp p^2 s^2 \mp 2 qrps))} = \sqrt{(\mp a^2 b^2 (qr \mp ps)^2)}$, mithin

$$bC \cdot MK = \frac{b^2 a^2 (ps \mp qr) \cdot \sqrt{\mp} 1}{\sqrt{(\mp a^2 b^2 (qr \mp ps)^2)}} =$$

$$(b^2 a^2 (ps \mp qr) \cdot \sqrt{\mp} 1) : (b^2 a (qr \mp ps) \sqrt{\mp} 1)$$

$= ba = Cm \cdot CB$; folglich die gesuchte Verhältnis $bC \cdot MK : Cm \cdot CB = 1 : 1$. Es ist klar, daß man statt bC und MC jedes andere Paar einander zugeordneter Halbmesser hätte nehmen können, und doch ebendieses Verhältnis würde erhalten haben, daß also alle dergleichen Parallelogrammen gegen das Rectangel aus den beeden Haupthalbmessern ei-

nerlei Verhältnis haben, mithin einander gleich sind, oder sich zu einander = 1 : 1 verhalten.

§. 10. ab, Mn seien zween beliebige Durchmesser, die sich in dem Mittelpunkt C schneiden, (Fig. 33.) so ist (§. 9.) das Parall. M c b ε = dem Rect. B c m α, P. M C a ζ = R. B C G β, P. a c n η = R. G C D γ, und P. b C n δ = R. m c D δ, folglich P. ε ζ η ϑ = R. α β γ δ; nun ist ε ζ η ϑ das Parall. welches a b, M n, zu Seiten und M C b, M C β zu Winkeln hat; folglich ist das Parallelogram, welches sich aus zween einander zugeordneten unter dem Winkel, unter welchem sie einander zugeordnet sind, allemal dem Rectangel gleich, dessen Seiten die beeden Hauptdurchmesser sind, und daher beständig von ebender Grösse. Zieht man nun zwischen den Endpunkten zweener zugeordneter Durchmesser a b, M n, grade Linien M a, a n, n b, b M, so ist, da M c = c n, a c = b c und M c b = a c n ist, M b = a n und M a = b n, also M a n b ein Parallelogr. und dieses P. ist halb so groß, als das ε ζ η ϑ. Da nun ε ζ η ϑ beständig einerlei Grösse hat, was auch M n, a b für ein Paar einander zugeordneter Durchmesser sind, so erhellet, daß das Par. M a n b beständig gleich groß ist, was auch M n, a b, für zugeordnete Durchmesser sind.

§. 11. Hier ist B C = C A = a, und C P = z, folglich $\frac{CA^2}{CP} = \frac{a^2}{z} = CT$; nun ist △ A M T ∾ △ B N T, also A M : B N = A T : B T

$BT = (CA - CT) : (BC + CT) = \left(a - \frac{a^2}{z}\right) :$

$\left(a + \frac{a^2}{z}\right) = (az - a^2) : (az + a^2) =$

$(z - a) : (z + a)$, und I) $AM = BN . (z - a) :$
$(z + a)$; auf ebendie Art findet man aus den ähnlichen Dreiecken AMT, BNT, noch eine Gleichung für AM; man hat nämlich $PG : PT =$
$AM : AT$ (Q.), nun ist $PG^2 = \frac{\mp b^2 z^2}{a^2} + b^2$

$= \mp b^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) = \mp b^2 \left(\frac{a^2 - z^2}{a^2}\right)$,

folglich $PG = \sqrt{\left(\frac{a^2 - z^2}{a^2}\right)} . \sqrt{\mp b^2} =$

$\sqrt{\mp b^2} . \frac{\sqrt{(a^2 - z^2}}{a}$; ferner $PT = PC - CT$

$= z - \frac{a^2}{z}$, und $AT = CA - CT = a^2 -$

$\frac{a^2}{z}$; diese Werthe von PG, PT, AT in Q gesetzt, giebt

$\frac{\sqrt{\mp b^2} . \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} : \left(z - \frac{a^2}{z}\right) = AM;$

$AM = \frac{\sqrt{\mp b^2}}{a} \left(a - \frac{a^2}{z}\right)$,

oder

oder $\frac{\sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a} : \left(\frac{z^2 - a^2}{z}\right) =$

$AM : \left(\frac{az - a^2}{z}\right)$

Folglich

$AM.(z^2 - a^2) = \frac{\sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a^2 - z^2)} \cdot (az - a^2)}{a}$

$= \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a^2 - z^2)} \cdot (z - a)$, oder $AM.(z \mp a).(z - a) = \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a^2 - z^2)} \cdot (z - a)$

$= \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a \mp z)} \cdot \sqrt{(a - z)} \cdot (z - a)$, folglich $AM.(z \mp a) = \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a \mp z)} \cdot \sqrt{(a - z)}$ und $AM \sqrt{(z \mp a)} \cdot \sqrt{(z \mp a)} = \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(z \mp a)} \cdot \sqrt{(a - z)}$ mithin $AM \cdot \sqrt{(z \mp a)} = \sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a - z)}$; dieß giebt nun II.) $AM = \frac{\sqrt{\mp b^2} \cdot \sqrt{(a - z)}}{\sqrt{(a \mp z)}}$; hieraus folgt $AM^2 = \frac{\mp b^2 \cdot (a - z)}{a \mp z}$, also $(a - z) : (a \mp z) = AM^2 : \mp b^2$, und diesen Werth von $(a - z) : (a \mp z)$ in die erstere Gleichung für AM gesetzt, giebt $AM = -BN.(a - z) : (a \mp z) = -BN. \frac{AM^2}{\mp b^2}$,

folglich $\mp b^2 = \frac{-BN.AM^2}{AM} = -BN.AM$,

oder

oder da — BN hier nichts besonders bedeutet, so hat man $\pm b^2 = BN . AM$;

§. 12. Es ist $\pm b^2 = \frac{n^2}{\pm 4m^2} = \frac{n^2}{\pm 4\frac{b^2}{a^2}}$ (§. 8. Anm.) $= \frac{n^2 a^2}{\pm 4b^2}$; also $b^4 = \frac{n^2 a^2}{4}$, und $\pm b^2 = \frac{1}{2} na$;

§. 13. Da $x = a \pm z$, so ist $PN = \pm am^2 \pm m^2 z - \frac{1}{2} n$; nun ist (§. 12.) $\pm b^2 = \frac{1}{2} na$, also $\frac{1}{2} n = \pm \frac{b^2}{a}$, ferner ist $m^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}$;

folglich $PN = \pm a \frac{b^2}{a^2} \pm m^2 z \mp \frac{b^2}{a} = \pm \frac{b^2}{a} \mp \frac{b^2}{a} \pm m^2 z = \pm m^2 z = \pm \frac{b^2}{a^2} z$; nun ist $\pm \frac{b^2}{a} = \frac{n}{2}$, also $\pm \frac{b^2}{a^2} = \frac{n}{2a}$, und daher $PN = \pm \frac{nz}{2a}$, und $2a : n = z : PN$;

§. 14. Da $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$ und 1 nicht $< m^2$ sein kann, so kann auch 1 nicht $< \frac{b^2}{a^2}$ sein, folg-

lich ist auch a^2 nicht $< b^2$ und daher a nicht $< b$.

Ist $a = b$, so wird $m^2 = \frac{b^2}{a^2} = 1$;

§. 16. Aus (II. §. 21.) ist diejenige zu dem Hauptdurchmesser geordnete Applikate, welche in dem Brennpunkt steht, $= \frac{1}{2} n$; setzt man also in der Gleichung $a^2 y^2 \mp b^2 z^2 \mp a^2 b^2 = 0$, statt $y \frac{1}{2} n$, so bezieht sich das in ihr befindliche z auf die zu $y = \frac{1}{2} n$ gehörige Abscisse, also auf diejenige, welche aus C bis in den Brennpunkt reicht, d. i. auf CF und Cf. Man erhält daher $CF = Cf =$

$$\sqrt{\left(\mp \frac{a^2 n^2}{4 b^2} \mp a^2\right)} = \sqrt{\left(a^2 \mp \frac{a^2 n^2}{4 m^2}\right)} =$$

$$\sqrt{(a^2 \mp a^2 m^2)} = \sqrt{\left(a^2 \mp \frac{a^2 b^2}{a^2}\right)} =$$

$\sqrt{(a^2 \mp b^2)}$; hieraus wird nun $FM^2 = \mp$

$$\frac{b^2 z^2}{a^2} \mp b^2 \mp b^2 \mp a^2 \mp z^2 - 2z.CF = \mp$$

$$\frac{b^2 z^2}{a^2} \mp a^2 \mp z^2 - 2z.CF = a^2 - 2z.CF$$

$$\mp \frac{z^2}{a^2}.(a^2 \mp b^2) = a^2 - 2z \times CF \mp \frac{z^2}{a^2}.CF^2$$

$$= \left(a - \frac{z}{a}.CF\right)^2; \text{ Folglich } FM = a - \frac{z}{a}.$$

CF;

CF; statt $-z$, $+z$ gesetzt giebt $fM = a + \frac{z}{a}$.

CF; nun ist aus dem Vorhergehenden klar, daß bei der Ellipse z niemals $> a$ oder $\frac{z}{a}$ niemals > 1 werden kann, mithin ist $\frac{z}{a} . CF$ niemals $> CF$, und daher, weil $CF < a$ ist, $\frac{z}{a} . CF < z$, folglich bei der Ellipse in allen Fällen $a - \frac{z}{a} . CF$ oder FM bejaht. Bei der Hyperbel hingegen ist z niemals $< a$, und daher in keinem Fall $\frac{z}{a} < 1$, folglich niemals $\frac{z}{a} . CF < CF$, mithin, weil bei ihr $CF > a$ ist, allemal $\frac{z}{a} . CF > a$; demnach bei der Hyperbel $a - \frac{z}{a} . CF = FM$ in allen Fällen verneint. Der Ausdruck $a - \frac{z}{a} . FM$ bezeichnet also bei der Ellipse $+FM$, bei der Hyperbel aber $-FM$; folglich ist $\pm FM = a - \frac{z}{a} . CF$,

mithin $fM \mp FM = a \mp \frac{z}{a} . CF \mp a - \frac{z}{a} . CF$

$= 2a$, oder in der Ellipse ist die Summe und in der Hyperbel der Unterschied der Linien, die man aus irgend einem Punkt der krummen Linie nach den beeden Brennpunkten zieht, eine beständige Grösse, nämlich so groß, als die Axe.

§. 18. Es ist $TP = CT - CP = \frac{a^2}{z} - z$;

nun ist $a^2 y^2 \mp b^2 z^2 \mp a^2 b^2 = o$; daraus den Werth von $a^2 : z - z$ gesucht, giebt

$$a^2 y^2 = \mp b^2 z^2 \mp a^2 b^2 \quad (C)$$

also durchaus mit $\mp b^2 z$ dividirt,

$$a^2 y^2 : \mp b^2 z = - z \mp a^2 : z$$

Demnach ist

$$TM^2 = TP^2 \mp PM^2$$

$$= \left(\frac{a^2 y^2}{\mp b^2 z}\right)^2 \mp y^2$$

$$= y^2 \mp \frac{a^4 y^4}{b^4 z^2}$$

$$= y^2 . \left(\frac{b^4 z^2 \mp a^4 y^2}{b^4 z^2}\right)$$

und

und $TM = \frac{y \cdot \sqrt{(b^4 z^2 \mp a^4 y^2)}}{\mp b^2 z}$ ⊙)

Nun multiplicire man in (ℂ) auf beiden Seiten mit a^2, so ergiebt sich

$$a^4 y^2 = \mp a^2 b^2 z^2 \mp a^4 b^2$$

und diesen Werth statt $a^4 y^2$ in ⊙ gesetzt, giebt

$$TM = \frac{y \cdot \sqrt{(b^4 z^2 \mp b^2 a^2 z^2 \mp a^4 b^2)}}{\mp b^2 z}$$

$$= \frac{by \cdot \sqrt{(b^2 z^2 \mp a^2 z^2 \mp a^4)}}{\mp b^2 z}$$

$$= \frac{y \cdot \sqrt{(b^2 z^2 \mp a^2 z^2 \mp a^4)}}{\mp b z}$$

um nun die Gleichung im Buche zu erhalten, quadrire man auf beiden Seiten, so erhält man

$$TM^2 = \frac{y^2 \cdot (b^2 z^2 \mp a^2 z^2 \mp a^4)}{b^2 z^2}$$

oder $TM^2 = \frac{y^2 \cdot (\mp b^2 z^2 - a^2 z^2 \mp a^4)}{\mp b^2 z^2}$

also $TM = \frac{y \cdot \sqrt{(\mp b^2 z^2 - a^2 z^2 \mp a^4)}}{b z \sqrt{\mp 1}}$

Ferner ist

$$TF = CT - CF$$

und $$Tf = CT + Cf$$

Da nun (Anf. dieses §.) $CT = a^2 : z$, und $CF = Cf = \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$, so hat man

$$TF = a^2 : z - \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$$

und $$Tf = a^2 : z + \sqrt{(a^2 \mp b^2)}$$

woraus sich nun das übrige leicht folgern läßt.

§. 19. Weil $TOF = TPM = 90°$, so ist $\triangle TOF \sim \triangle TPM$, also

$$TM : MP = TF : FO$$

oder $$TM^2 : y^2 = TF^2 : FO^2,$$

Nun ist aus dem vor. §.

$$TM^2 : y^2 = Tf . TF : \mp b^2$$

also $$TF^2 : FO^2 = Tf . TF : \mp b^2$$

$$\text{und} \quad FO^2 = \frac{\mp b^2 . TF^2}{Tf . TF}$$

$$= \frac{TF . \mp b^2}{Tf} \quad (C)$$

Es ist ferner $fT : FT = fo : FO$

aber $\triangle foM \sim \triangle FOM$, also

$$fo : FO = fM : FM$$

und

und daher

$$fT : FT = fM : FM$$

Folglich aus ℂ)

$$fT : FT = fM : FM = \underline{+} b^2 : FO^2 \odot)$$

Ebenso ist

$$TM^2 : y^2 = Tf^2 : fo^2$$

also

$$Tf^2 : fo^2 = Tf . TF : \underline{+} b^2$$

und

$$fo^2 = \frac{Tf^2 . \underline{+} b^2}{Tf . TF}$$

$$= \frac{Tf . \underline{+} b^2}{TF}$$

Dieß giebt

$$fT : FT = fo^2 : \underline{+} b^2$$

und aus ⊙

$$fT : FT = \underline{+} b^2 : FO^2$$

Folglich

$$fo^2 : \underline{+} b^2 = \underline{+} b^2 : FO^2$$

oder $fo : \sqrt{\underline{+} b^2} = \sqrt{\underline{+} b^2} : FO$

§. 20. Es ist nämlich

in I. 10. fig. 6.	BP	PE	PM	PN	QB	QE	mQ	Qn
hier ng 19.	TA	TB	TM	TM	CA	CB = CA	CR	CR

weil die beiden Punkte M und N Fig. 6. in der 19. Fig. zusammenfallen. Dieß verwandelt nun die Gleichung I. 10.

$$BP.PE : PM.PN = QB.QE : mQ.Qn$$

in $TA.TB : TM^2 = CA^2 : CR^2$

also $TM^2 : CR^2 = TA.TB : CA^2$ (C)

Nun ist

$$TA = CT - CA$$
$$= a^2 : z - a \quad (\S.\ 18.)$$
$$TB = CT + CB$$
$$= a^2 : z + a$$

$$\text{also } TA.TB = \left(\frac{a^2}{z} - a\right) \times \left(\frac{a^2}{z} + a\right)$$
$$= \frac{a^4}{z^2} - a^2$$

Dieß giebt statt (C)

$$TM^2 : CR^2 = \left(\frac{a^4}{z^2} - a^2\right) : a^2$$

$$\text{aber } TM^2 = \frac{y^2.Tf.TF}{\pm b^2}$$

also

$$\frac{y^2.Tf.TF}{\pm b^2} : CR^2 = \left(\frac{a^4}{z^2} - a^2\right) : a^2$$
$$= (a^4 - a^2z^2) : a^2z^2$$

$$\text{Dieß giebt } CR^2 = \frac{a^2z^2y^2.Tf.TF}{\pm b^2.(a^4 - a^2z^2)}$$

=

$$= \frac{z^2 y^2 . Tf . TF}{\mp b^2 . (a^2 - z^2)} \odot)$$

Nun ist $CF^2 = a^2 \mp b^2$

also

$$FM . fM = \left(a - z . \frac{CF}{a}\right) . \left(a + z \frac{CF}{a}\right) \S. 16.$$

$$= a^2 - z^2 . \frac{CF^2}{a^2}$$

$$= a^2 - z^2 . \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^4 - (a^2 z^2 \mp b^2 z^2)}{a^2}$$

und

$$a^2 . FM . fM = a^4 - a^2 z^2 \mp b^2 z^2$$

Diese mit der Gleichung §. 18.

$$TF . Tf = \frac{a^4 - a^2 z^2 \mp b^2 z^2}{z^2}$$

verglichen, giebt

$$a^4 - a^2 z^2 \mp b^2 z^2 = TF . Tf . z^2$$

$$= a^2 . FM . fM$$

mithin

$$Tf . TF . z^2 = a^2 . FM . fM$$

und

$$z^2 y^2 Tf . TF = a^2 y^2 . FM . fM$$

Dieß in ⊙ gesetzt, giebt

$$CR^2 = \frac{a^2 y^2 . FM . fM}{\mp b^2 a^2 \mp b^2 z^2}$$

und aus (§. 18 ℂ) den Werth von $a^2 y^2$ substituirt, giebt

$$CR^2 = \frac{(\mp a^2 b^2 \mp b^2 z^2) . FM . fM}{\mp a^2 b^2 \mp b^2 z^2}$$

$$= FM . fM;$$

§. 22.

Die Gleichung

$$AC : Ar = AR : AN$$

giebt $$AC . AN = Ar . AR$$

$$= \tfrac{1}{2} AB . AR$$

aber aus §. 21. ist

$$AC . AN = Ka^2$$

also $$\tfrac{1}{2} AB . AR = Ka^2$$

Nun ist

$$RB = AB - AR$$

$$= 2Ar - AR$$

also $$AR . RB = AR . (2Ar - AR)$$

$$= 2Ar . AR - AR^2$$

Nun ist $\measuredangle ARH = \measuredangle BR\varrho$

und $\measuredangle AB\varrho = \measuredangle AH\varrho$

weil beide auf ebendem Bogen $A\varrho$ stehen;

also $\triangle AHR \sim \triangle \varrho BR$

und daher

$$AR : HR = R\varrho : RB$$

Folglich

$$AR \cdot RB = HR \cdot R\varrho$$
$$= (HN - NR) \cdot (\varrho N + NR)$$
$$= (HN - NR) \cdot (HN + NR)$$
$$= HN^2 - NR^2$$

Folglich wird ꝛc. ꝛc.

Sechstes Buch.

§. 1.

Da die Asymptoten die eingebildeten Durchmesser von den wirklichen absondern, so müssen sie an der Gränze von beiden liegen, und daher sowohl unter allen wirklichen, als unter allen eingebildeten die letzten sein. Nun treffen die eingebildeten die Schenkel nirgendwo, die wirklichen aber allemal in zween Punkten, also gehören die Durchschnittspunkte der Asymptoten und der Hyperbel in eine mittlere Classe zwischen wirkliche und unmögliche Durchschnittspunkte, oder sie müssen an sich zwar möglich, aber sie anzugeben muß unmöglich sein, d. h. die Asymptoten müssen neben den Schenkeln der Hyperbel so herstreichen, daß sie sich solchen immer mehr und mehr nähern, und dadurch die Möglichkeit, eins-

ander

ander zu erreichen, behalten; aber dieser Punkt ihrer Zusammenkunft muß unendlich weit entfernt sein. S. §. 6. am Ende.

Eine Gleichung zwischen Coordinaten auf dem durch den Mittelpunkt C senkrecht gezogenen Durchmesser, habe ich in den Erläuter. der Kästner. Anal. S. 159. beigebracht, die Anfänger hierbei nachschlagen können.

§. 3.

Um eine Gleichung wie (I. 6.), in der die erste Potenz von u fehlt, zu erhalten, suche man aus der Gleichung §. 1.

$$s^2u^2 - 2qsu\omega + q^2\omega^2 - m^2p^2\omega^2 + 2m^2pru\omega - m^2r^2u^2 + n^2 : 4m^2 = 0$$

die Glieder, welche u' enthalten auf o zu bringen, daß also

$$2m^2pru\omega - 2qsu\omega = 0$$

oder $$m^2pr - qs = 0$$

werde, ohne jedoch etwas vorauszusetzen, das sich nicht voraussetzen läßt. Der Ausdruck

$$m^2pr - qs = 0$$

giebt $$m^2pr = qs \quad (C)$$

Nun ist aus (V. 2.) $p\omega - ru = z$, $su - q\omega = y$, also

$$\frac{p\omega - z}{u} = r$$

und

und $\frac{y \pm q\omega}{u} = s$

Dieß in C gesetzt, giebt

$$m^2 p \cdot \frac{p\omega - z}{u} = q \cdot \frac{y \pm q\omega}{u}$$

oder

$$m^2 p^2 \omega - m^2 pz = qy \pm q^2 \omega;$$

und hieraus den Werth von ω gesucht, giebt

$$(m^2 p^2 - q^2) \cdot \omega = qy \pm m^2 pz$$

also

$$\frac{qy \pm m^2 pz}{m^2 p^2 - q^2} = \omega \quad \odot)$$

Für diesen Werth von ω wird also der Ausdruck

$$2 m^2 pru\omega - 2 qsu\omega$$

$= o$, auf was für einer Abscissenaxe auch ω genommen würde. Könnte man nun in dem Werthe von ω irgend zweene einander zugehörige bestimmte Werthe von y, z, angeben, für die der Ausdruck $\odot$ wirklich statt fände, so wäre dieß ein Beweiß, daß es für jede durch den Mittelpunkt C gezogene Abscissenaxe einen Werth von ω gebe, für den $2 m^2 pru\omega - 2 qsu\omega = o$ wird, oder daß jede durch C gezogene grade Linie ein Durchmesser der Hyperbel sei, zu dem die Applikaten geordnet sind I. 6. Nimmt man nun an, daß auf der Abscissenaxe zu einer bestimmten Abscisse z. E. $z = \alpha$, die Ordinate $y = \beta$ gehöre, so verwandelt dieß den Werth von

ω in

ω in $(q\alpha \pm m^2 p\beta) : (m^2 p^2 - q^2)$; da nun dieß offenbar, so lange nicht $mp = q$, oder so lange die Abscissenaxe keine Asymptote ist, indem in solchem Fall des Werths von ω Nenner $= 0$ wäre, eine bestimmte Grösse ist, und da ω jeden bestimmten Werth, den man nur will, haben kann, so ist klar, daß man für jede Abscissenaxe, für die nicht $mp = q$ ist, einen Werth von $\omega = (q\alpha \pm m^2 p\beta) : (m^2 p^2 - q^2)$ setzen könne, und nun folgt also hieraus, daß eine jede durch den Mittelpunkt C gehende grade Linie ꝛc.

Es erhellet hieraus, daß die im Buche gesetzten Buchstaben a, b, blos ein Paar bestimmte Coordinaten bedeuten. Daß der Hr. Aut. diese Buchstaben, die sich sonst auf besondere Linien beziehen, gebraucht hat, kann zu Verwirrung Anlaß geben, die ich durch den Gebrauch der Griechischen Buchstaben α, β vermieden habe. Ausserdem muß ich noch erinnern, daß die Sätze dieses §. im Buche in ziemlich verkehrter Ordnung vorgetragen sind. Der Anfänger findet schon tausend Schwierigkeiten bei der zweiten Zeile, da er gar die Möglichkeit nicht einsieht, wie nur der Verfasser hier auf den Ausdruck $(qa \pm m^2 pb) : (m^2 p^2 - q^2)$ hat verfallen können, und ich habe mich deswegen, so wie schon an manchen vorhergehenden §. §. genöthigt gesehen, den ganzen Vortrag umzukehren.

§. 5.

Nimmt man eine Asymptote zur Axe an, so ist $mp = q$, also $q^2\omega^2 - m^2 p^2 \omega^2 = 0$ und diese beiden Glieder fallen also in der allgemeinen Gleichung

chung §. 1. weg, und es bleibt noch, weil $b^2 = n^2 : 4m^2$ ist,

$$s^2u^2 - 2qsu\omega + 2m^2pru\omega - m^2r^2u^2 + b^2 = o$$

also statt q hier mp gesetzt, giebt

$$(s^2u^2 - 2mpu\omega.s + 2mpu\omega.mr + b^2 - m^2r^2u^2 = o$$

$$= s^2u^2 + (mr-s).2mpu\omega + b^2 - m^2r^2u^2$$

$$= (s^2 - m^2r^2).u^2 + b^2 + 2mpu\omega.(mr - s)$$

$$= u^2 + b^2 : (s^2 - m^2r^2) - 2mpu\omega.(s - mr) : (s^2 - m^2r^2)$$

$$= u^2 + b^2 : (s^2 - m^2r^2) - 2mpu\omega.(s - mr) : (s + mr).(s - mr)$$

also endlich

$$u^2 + b^2 : (s^2 - m^2r^2) - 2mpu\omega : (s + mr) = o;$$

wo das Glied, welches lauter beständige Grössen enthält, also $b^2 : (s^2 - m^2r^2)$ das Produkt der beiden zu ω gehörigen Werthe der Applikaten u ist. Nimmt man also auf der Asymptote EL die Applikaten CI und CF, die zur Abscisse $= o$ gehören, und so die zur Abscisse Cp gehörige Applikaten pP und pD den vorigen gleichlaufend, so ist

1.) $CI . CF = b^2 : (s^2 - m^2r^2)$

2.) $Dp . pP = b^2 : (s^2 - m^2r^2)$

also

$$Dp . pP = CI . CF.$$

Ist nun C1 ein Halbmesser, so ist $C1 = CF$, also

$$Dp \cdot pP = C1^2;$$

§. 6.

Die Gleichung A mit $s^2 - m^2 r^2 = o$ multiplicirt, giebt für $s = mr$

$$u^2 \cdot o - 2mpu\omega \cdot (s - mr) \pm b^2 = o$$

also $b^2 = o$, welches nicht sein kann.

Für $s = -mr$ giebt diese Multiplication

$$u^2 \cdot o - 2mpu\omega \cdot (s - mr) \pm b^2 = o$$

oder

$$-2mpu\omega \cdot (-2mr) \pm b^2 = o$$

also $$b^2 = 4m^2 pr \cdot u\omega$$

und $$u\omega = b^2 : 4m^2 pr;$$

Die folgenden sechs §§. dieses Buchs, werden Anfänger ohne weitere Erläuterungen für sich durchzugehen im Stande sein. Da das Buch zu einer Zeit geschrieben und bekannt gemacht wurde, da man die Kästnerische Analysis des Unendlichen noch nicht hatte, so könnte bei einer neuen Auflage dieses Buchs der beigefügte Anhang von der Differentialrechnung wohl wegbleiben; wenigstens ist er jezt völlig entbehrlich, und dieß ist die Ursache, weswegen ich solchen ganz übergehe.

Fig: 14.

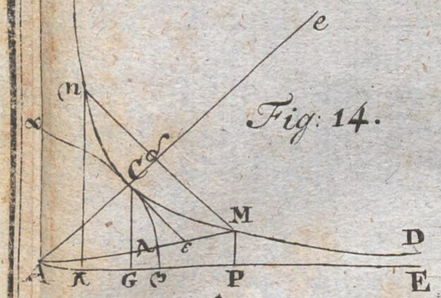


Fig: 1.

Fig: 2.

Fig: 3.

Fig: 4.

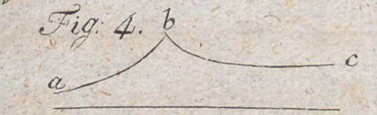
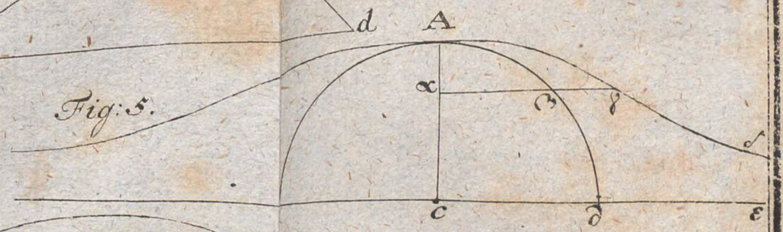


Fig: 5.



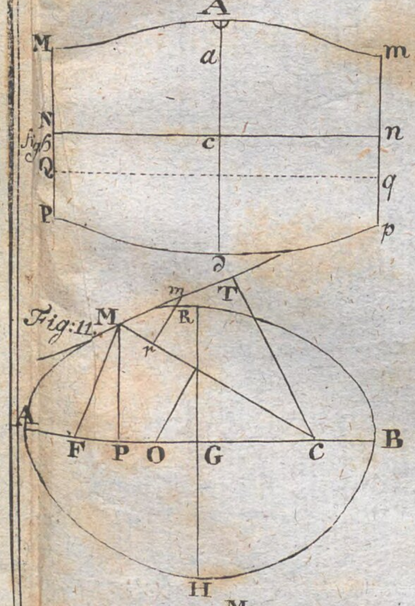


Fig: 7.

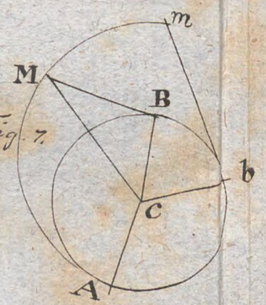


Fig: 8.

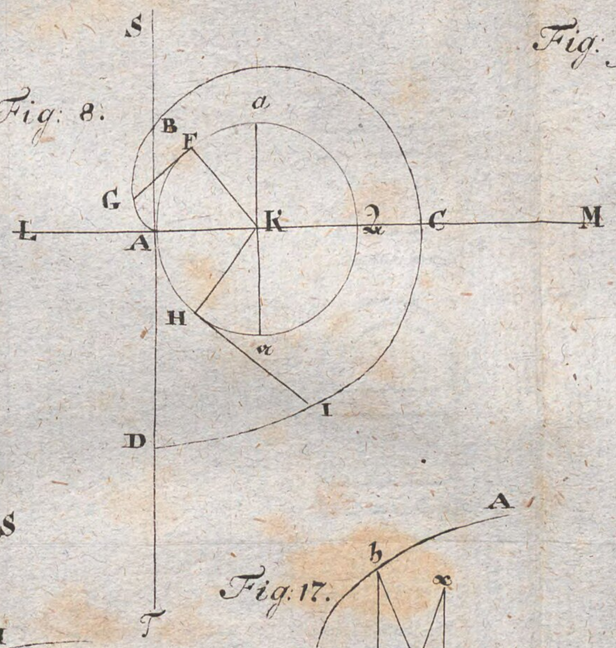


Fig: 9.

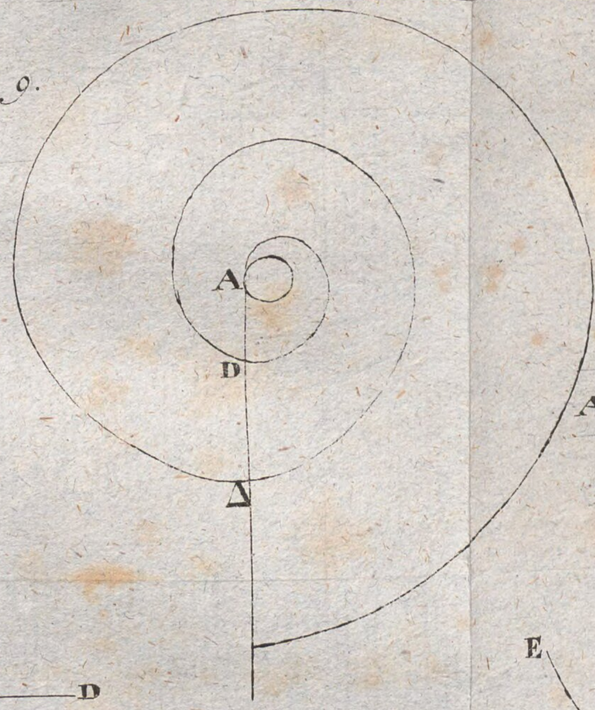


Fig: 10.

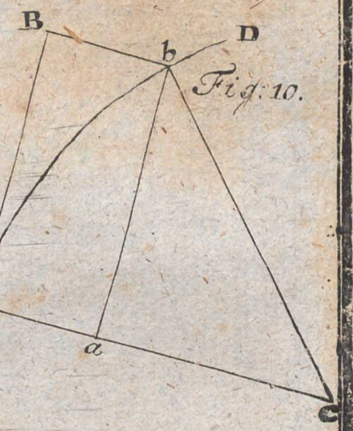


Fig: 11.

Fig: 12.

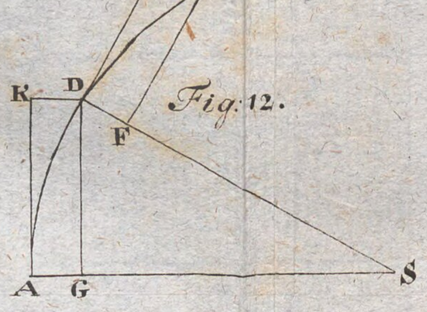


Fig: 15.

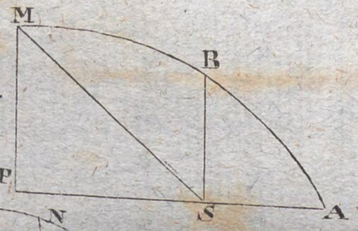


Fig: 16.

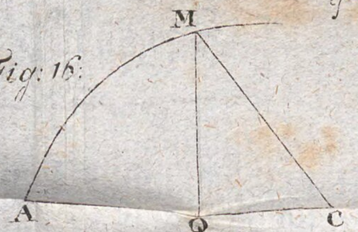


Fig: 17.

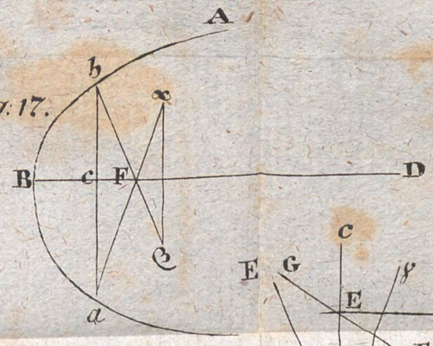


Fig: 18.

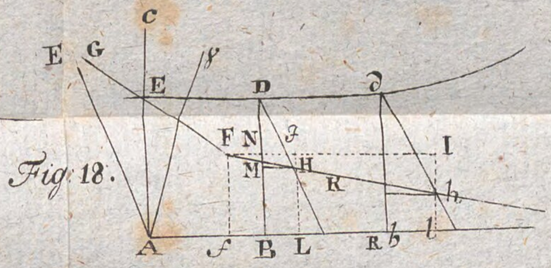


Fig: 19.

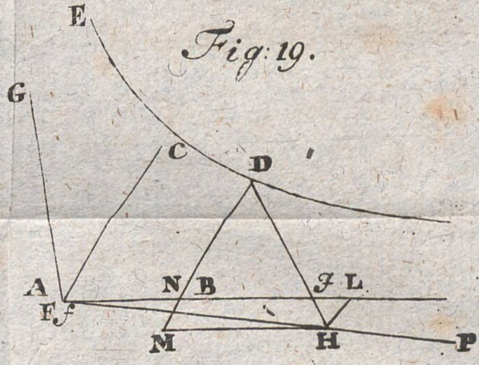


Fig: 13.

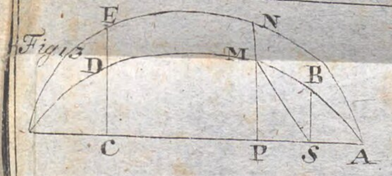


Fig: 20.

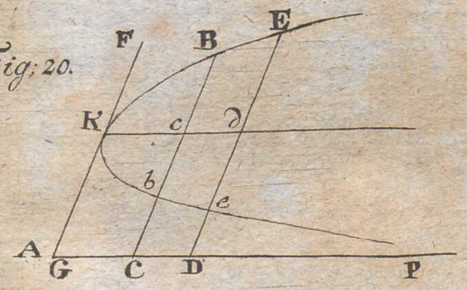


Fig: 21.

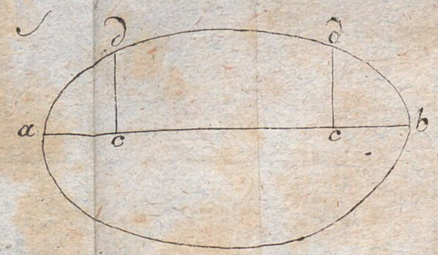


Fig: 22.

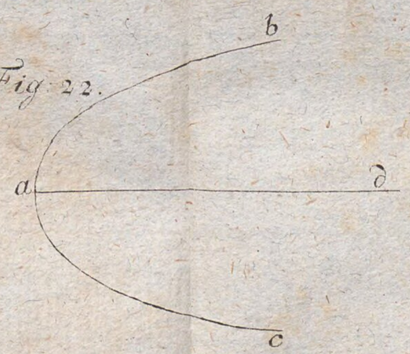


Fig: 23.

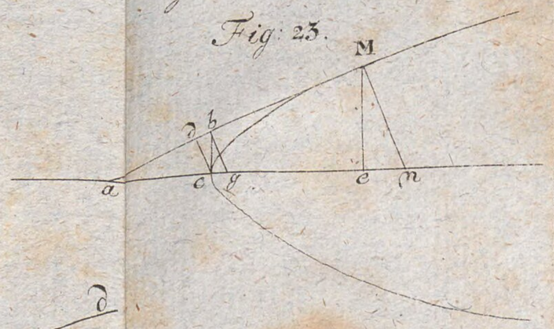


Fig: 24.

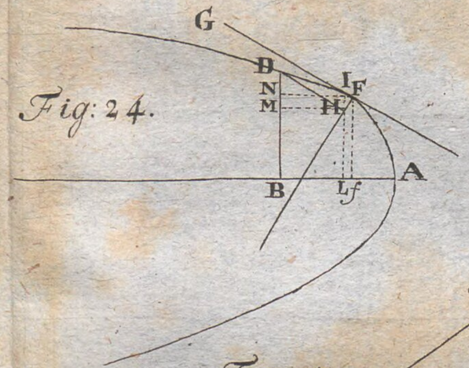


Fig: 25.

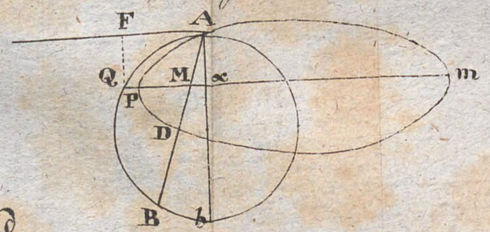


Fig: 26.

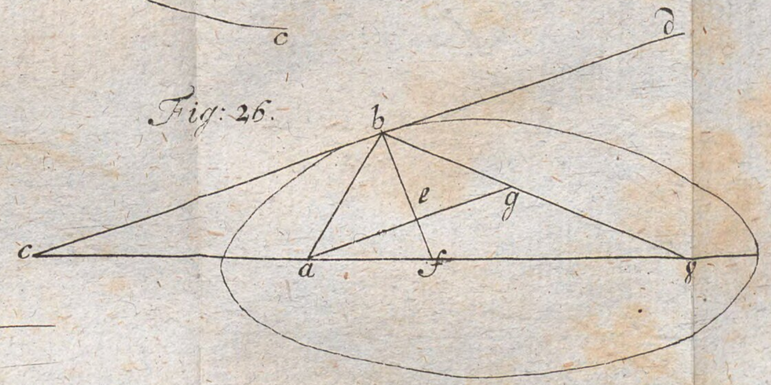


Fig: 27.

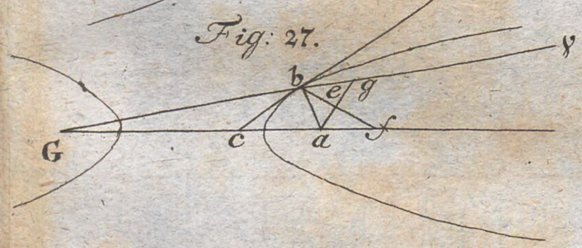


Fig: 28.

Fig: 29.

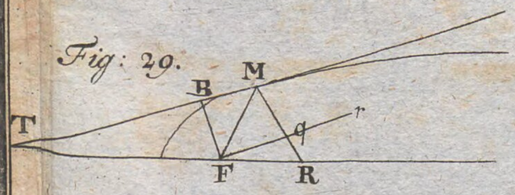


Fig: 30.

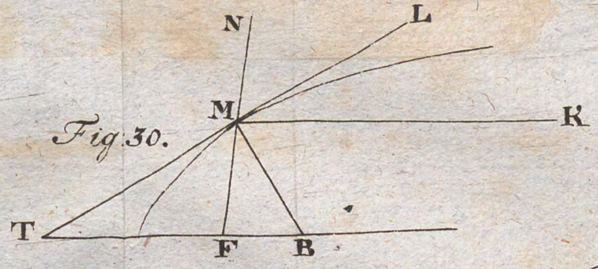


Fig: 31.

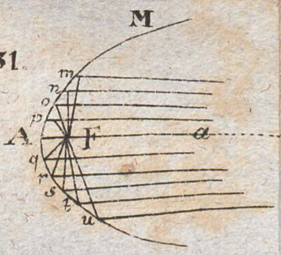


Fig: 32.

Fig: 33.

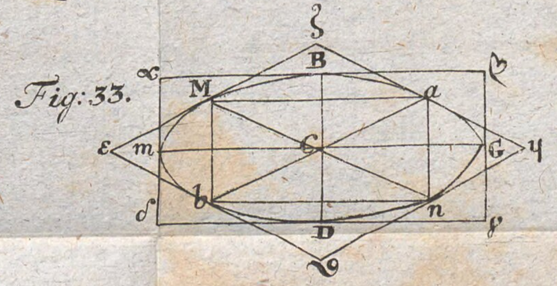


Fig: 34.

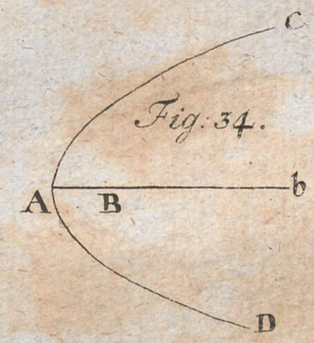


Fig: 35.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Erläuterungen über die Kästnerische Analysis des Unendlichen ; ... worinn zugleich die hyperbolische Logarithmen der Zahlen 1 - 500 in 13 Decimalstellen enthalten sind
Bd.: [2]

Giessen 1781

Math.p. 281-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082250-5
VD18 90034465